Mat-1.2600 Sovellettu todennäköisyyslaskenta A

2. välikoe 20.12.2005/Mellin

Kirjoita *selvästi jokaiseen koepaperiin* alla mainitussa järjestyksessä: –Mat-1.2600 SovTnA 2. vk 20.12.2005 –opiskelijanumero + kirjain –TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet –koulutusohjelma ja vuosikurssi –mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat –nimikirjoitus

Sallitut apuvälineet: *Funktiolaskin* ja Lainisen ja/tai Mellinin *kaava-* ja *taulukkokokoelma*.

Vastaa jokaiseen neljään tehtävään *eri paperilla* – tarvitset siis 4 arkkia paperia.

Vastaa *lyhyesti* ja *ytimekkäästi*, mutta *perustele ratkaisusi*. Esimerkiksi pelkkä lukuarvo vastauksena *ei riitä* täysiin pisteisiin.

1. (a) Eräässä kyselytutkimuksessa haluttiin selvittää poliittisten puolueiden kannattajien suhteelliset osuudet. Tutkimus perustettiin äänioikeutettujen joukosta kerättyyn yksinkertaiseen satunnaisotokseen, jonka koko oli 1000. Puolueen A kannattajia oli otoksessa 250.

   Määrää 99 %:n luottamusväli puolueen A kannattajien suhteelliselle osuudelle kaikkien äänioikeutettujen joukossa.

   (b) Tehtaalla täytetään pesuainepakkauksia. Tavoitteena on, että pakkaukset painavat sisältöineen keskimäärin 1100 g. Täytettyjen pakkausten joukosta poimittiin yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko oli 31. Pakkaukset punnittiin, jolloin painojen aritmeettiseksi keskiarvoksi saatiin 1090 g ja painojen varianssiksi saatiin 100 g^2.

   Määrää pakkausten painon odotusarvolle 95 %:n luottamusväli.

2. (a) Johda Bernoulli-jakauman Ber(p) momenttiemäfunktio ja *sen avulla* jakauman odotusarvo ja varianssi.

   Bernoulli-jakauman pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = \Pr(X = x) = p^x q^{1-x}\ , 0 < p < 1\ , q = 1 - p\ , x = 0,1$$

   (b) Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia ja noudattavat jatkuvaa tasaista jakaumaa välillä $[0,1]$. Johda satunnaismuuttujan

$$U = X + Y$$

   tiheysfunktio.

   Satunnaismuuttujien X ja Y tiheysfunktiot:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1\ , x \in [0,1] \\ 0\ , x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1\ , y \in [0,1] \\ 0\ , y \notin [0,1] \end{cases}$$

3. On tärkeätä mitata erään kemiallisen prosessin lämpötila tarkasti. Mittari A on tarkka mutta kallis, kun taas mittari B on halpa. Tarkoituksena on selvittää näyttääkö mittari B riittävän tarkasti.

   Mittareiden vertaamiseksi järjestetään koesarja, jossa molemmilla mittareilla mitataan lämpötilat samoista 10:stä prosessista. Mittaustulokset (asteina) on annettu alla olevassa taulukossa.

Mittaus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	300	310	294	301	291	322	270	285	314	330
B	295	311	290	298	288	315	272	283	314	325

   Testaa 1 %:n merkitsevyystasoa käyttäen nollahypoteesia, että mittarit näyttävät keskimäärin samoin, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että ne eivät näytä keskimäärin samoin.

4. Oletetaan, että perusjoukoista S_1 ja S_2 poimitaan toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset, joista on mitattu samaa muuttujaa X koskevat havaintoarvot. Otoksista saadaan seuraavat yhteenvetotiedot:

$$\bar{X}_1 = 100 \qquad s_1^2 = 150 \qquad n_1 = 31$$
$$\bar{X}_2 = 101 \qquad s_2^2 = 80 \qquad n_2 = 46$$

   Olkoot μ_1 ja μ_2 muuttujan X odotusarvot ja olkoot σ_1^2 ja σ_2^2 muuttujan X varianssit perusjoukoissa S_1 ja S_2. Testaa 5 %:n merkitsevyystasoa käyttäen hypoteeseja

$$\mathrm{H}_0^{\mu} : \mu_1 = \mu_2 \qquad \mathrm{H}_1^{\mu} : \mu_1 < \mu_2$$

   Valitse testi nollahypoteesille H_0^{μ} testaamalla ensin 5 %:n merkitsevyystasoa käyttäen hypoteeseja

$$\mathrm{H}_0^{\sigma^2} : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad \mathrm{H}_1^{\sigma^2} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

5. (a) Alla olevassa taulukossa on annettu kahta muuttujaa x ja y koskeva pieni havaintoaineisto. Oletetaan, että aineistosta estimoidaan pienimmän neliösumman menetelmällä lineaarinen regressiomalli, jossa y on selitettävänä muuttujana ja x selittävänä muuttujana. Lisäksi mallissa on mukana vakio.

   Määrää estimoidun mallin selitysaste R^2.

Havainnon nro	x	y
1	−2	2
2	0	1
3	1	1
4	2	0
5	4	−1

   (b) Olkoon

$$y = -4x + 2$$

   muuttujan x (estimoidun) regressiosuoran yhtälö muuttujan y suhteen ja

$$y = -x - 1$$

   muuttujan y (estimoidun) regressiosuoran yhtälö muuttujan x suhteen.

   Määrää muuttujien x ja y aritmeettiset keskiarvot ja molempien mallien selitysasteet.