

- 1*. Osoita, että liikeradan kaarevuussäde ρ voidaan laskea yhtälöstä

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3},$$

missä \vec{v} ja \vec{a} ovat nopeus ja kiihtyvyys vektorisuureina. (Opastus: Ota käyttöön yksikkövektorit \hat{e}_r ja \hat{e}_φ . Määritelmän mukaan $\rho d\varphi = ds$, missä $d\varphi$ on rataelementtiä ds vastaava keskuskulman muutos.)

2. Voiman lauseke on $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = yz \hat{i} + xz \hat{j} + xy \hat{k}$.

- a) Osoita, että voima on konservatiivinen.
b) Mikä olisi tätä voimaa vastaava potentiaalienergian lauseke?
(Opastus: Ehkä helpoin tapa tutkia voiman konservatiivisuutta on tarkastella

suuretta $\nabla \times \vec{F}$, missä derivaattaoperaattori on $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$;

konservatiiviselle voimalle pätee $\nabla \times \vec{F} = 0$.)

3. Laskuvarjohyppääjä on ajan hetkellä $t=0$ kohdassa $z=0$. Hyppääjä liikkuu tällöin alaspäin nopeudella v_0 . Laskuvarjohyppääjään vaikuttaa maan vetovoiman kiihtyvyyden lisäksi ilman vastuksesta aiheutuva kiihtyvyys $a_r = -\beta v$. Laske hyppääjän

- a) nopeus ajan funktiona sekä
b) se nopeus, jonka hyppääjä saavuttaa pitkän pudotuksen aikana.

(Opastus: $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$.)

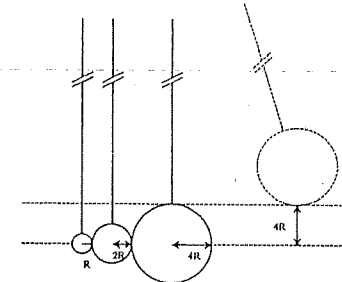
4. Avaruusaluksen alkumassa on 120 000 kg, josta suurin osa on polttoainetta. Aluksi se on kaukana auringosta, maasta ja muista planeetoista ja maahan nähden levossa. Alus suunnataan suoraan maasta pois päin, ja rakettimootorit käynnistetään hetkellä $t=0$. Pakokaasujen nopeus rakettiin nähden on $v_{ex} = 3$ km/s ja kaasuja purkautuu 1000 kg sekunnissa.
- a) Mikä on raketin kiihtyvyys hetkellä $t=0+$, siis heti lähdön jälkeen?
b) Laske raketin nopeus ajan t funktiona.
c) Maassa oleva tarkkailija mittaa Hubblen teleskoopilla raketin perästä purkautuvien pakokaasujen säteily spektriä. Karakterististen spektri viivojen Doppler-siirtymästä hän laskee raketin pakokaasujen nopeuden itseensä nähden. Hän huomaa, että moottori sammutetaan samalla hetkellä, kun pakokaasujen nopeus on nolla Maassa olevaan havaitisijaan nähden. Kuinka paljon aikaa on tällöin kulunut?
d) Mikä on avaruusaluksen kokonaismassa, kun rakettimoottori sammutetaan?

(Opastus: Muista, että pakokaasuilla on vauhti v_{ex} rakettimoottorin suhteen mitattuna.)

Nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma, opintojaksokoodi sekä kokeen päivämäärä jokaiseen koepaperiin.

5. Kolme marmoripalloa, joiden säteet ovat R , $2R$ ja $4R$ riippuu vierä vieraissa pitkistä langoista (ks. kuvaa), ja lankojen alapää on kiinni kunkin pallon keskipisteessä. Isoimman kuulan säde on 10 cm. Kuulien massakeskipisteet ovat horisontaalisella suoralla, ja isoin ja pienin pallo ovat reunimmaisina, $2R$ -pallo on keskimmäisenä. Massattomiksi oletetut langat ovat aluksi kaikki pystysuorassa suunnassa, ja pallot juuri ja juuri hipaisevat toisiaan. Tehtävään seuraava koe: Isointa palloa poikkeutetaan, edelleen langan kannattamana, sivulle lankojen määräämässä tasossa siten, että pallon massakeskipiste nousee $4R$:n verran alkutilannetta ylemmäksi. Sitten iso pallo lasketaan irti, jolloin se heilahtaa ja törmää keskikokoiseen palloon, joka puolestaan törmää pienimpään palloon.
- a) Miten kuvailisit, suurin piirtein, pallojen käyttäytymistä törmäystilanteessa ja sen jälkeen?
b) Laske pallojen nopeudet törmäyksen jälkeen?
c) Kuinka korkealle heilahtaa pienin pallo alkutilanteeseen verrattuna?

(Opastus: Oleta törmäykset täysin kimmoisiksi. Ajattele, että iso pallo törmää ensin keskimmäiseen, joka sitten törmää reunimmaisena olevaan pienimpään palloon.)



Kuva 1 Tehtävän 5 marmoripallot.

* Tehtävän 1 sijasta voit halutessasi vastata alla olevaan vaihtoehtoiseen tehtävään:

6. Selosta, mitä tarkoittavat käsitteet
- energian säilyminen,
 - liikemäärän säilyminen,
 - Newtonin toinen laki,
 - liikemäärämomentin säilyminen,
 - täysin kimmoton törmäys.

(Opastus: Saat käyttää sekä sanallisia selityksiä että matemaattisia lausekkeita, aivan kuten parhaaksi näet.)

Nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma, opintojaksokoodi sekä kokeen päivämäärä jokaiseen koepaperiin.