

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !  
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

1.

- (a) Määritä raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{-\frac{1}{x}})}{e^{-\frac{1}{x}}}$ , mikäli se on olemassa.  
(b) Funktiosta  $f$  tiedetään, että  $f(1) \leq 3$ ,  $f(4) \leq 2$  ja  $|f'(x)| \leq 2$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .  
Seuraako tästä, että  $f(2) \leq 5$ ? Perustele!

2.

- (a) Jos oletetaan, että  $f$  on kaksi kertaa derivoituva, positiivinen ja konvekssi funktio jollakin välillä  $(a, b)$ , niin seuraako tästä, että  $\sqrt{f(x)}$  on konvekssi tällä välillä? Entä  $f(x)^2$ ? Perustele!  
(b) Määritä funktion  $\ln(1+\sin(x))$  astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä  $a = 0$ . Voit käyttää hyväksesi tietoa, että  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$  ja  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$ .

3. Hae likimääräisesti yhtälön  $x^2 \cos(x) + e^{-x} = 0$  jokin ratkaisu Newtonin menetelmällä siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan  $10^{-3}$ . Alkuarvona voit käyttää  $x_0 = 2$ . Montako ratkaisua tällä yhtälöllä kaiken kaikkiaan on? (Perustele lyhyesti!)

**Huom!** Muista käyttää radiaaneja laskimessasi!

4.

- (a) Mikä integraali saadaan laskettavaksi jos integraalissa  $\int_3^8 \frac{t+1}{\sqrt{\frac{t}{2+t}}+1} dt$  tehdään sijoitus  $\sqrt{\frac{t}{2+t}} = x$ ? Tätä uutta integraalia ei tarvitse laskea.  
(b) Osoita, että  $\int_0^1 \frac{x}{1+2\ln(1-\frac{x}{2})+x+x^2} dx \geq \ln(\sqrt{2})$ , käyttämällä hyväksi epäyhtälöä  $\ln(1+t) \leq t$ , kun  $t > -1$ .