Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen, Ruotsalainen

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 16.10.2006

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Määritä lukujen $z = 2+2i$ ja $w = -3e^{i\pi/4}$ polaariesitykset (siis muoto $re^{i\theta}$ jossa $r > 0$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   (b) Mitä käyriä esittävät kompleksitason joukot

   $$A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) = 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) = -1\}?$$

   Mikä on näiden joukkojen leikkaus $A \cap B$?

2. a) Määritä vektoreiden $(1,2,-1,1)$, $(3,6,-9,1)$ ja $(2,4,-5,1)$ virittämän vektoriavaruuden dimensio ja määritä jokin kanta tälle vektoriavaruudelle käyttäen Gaussin algoritmia.

   b) Ratkaise x_1 yhtälösysteemistä

   $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   Cramerin säännön avulla.

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

   $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

   Voidaanko parametrit α, β ja γ valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi (englanniksi "rank")?

4. a) Laske $A^6 = AAAAAA$ diagonalisoimalla A, kun $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   b) Neliömatriisi A olkoon kääntyvä (eli säännöllinen, eli käänteismatriisi A^{-1} on olemassa). Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja $\mathbf{x} \neq 0$ sitä vastaava ominaisvektori. Osoita että $\lambda \neq 0$. Osoita että käänteismatriisin A^{-1} eräs ominaisarvo on $1/\lambda$, ja sitä vastaava ominaisvektori on $\mathbf{x}$.