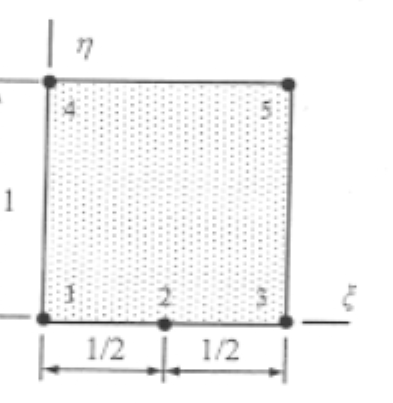
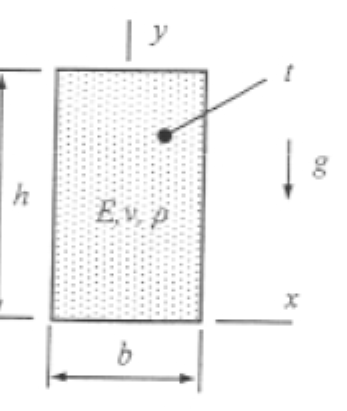
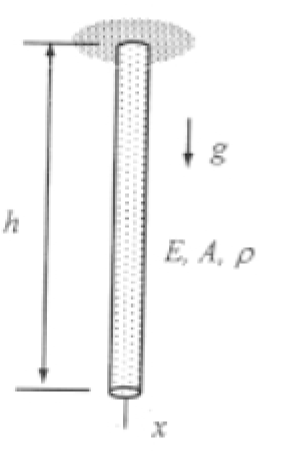
Kul-49.3300 Elementtimenetelmä I, välikoe 2, 16.05.2008



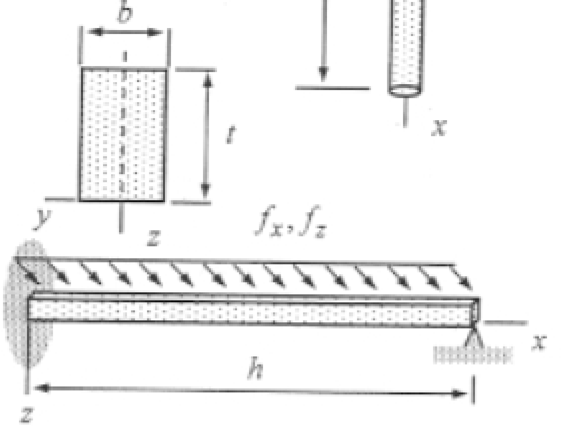
1. Muodosta kuvan viisisolmuisen elementin muotofunktioiden $N_1^e, N_2^e, N_3^e, N_4^e, N_5^e$ lausekkeet käyttäen skaalattuja koordinaatteja ξ ja η.



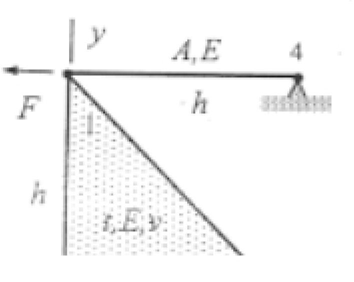
2. Kuvan kappaleeseen (paksuus t) vaikuttaa oma paino. Oletetaan, että siirtymäkomponentit ovat muotoa $u_x = -ax/h$, $u_y = ay/h$ ja $u_z = 0$, joissa a on parametri. Määritä parametri a käyttämällä virtuaalisen työn periaatetta kappaleelle.



3. Tarkastellaan kuvan oman painon kuormittaman sauvan siirtymiä käyttäen yhtä kolmisolmuista elementtiä (solmut 1, 2 ja 3 kohdissa $x_1 = 0$, $x_2 = h/2$ ja $x_3 = h$). Sauvan poikkileikkauksen pinta-ala A, maan vetovoiman kiihtyvyys g ja materiaalin E ja ρ ovat vakioita. Määritä sauvan vapaan pään siirtymä.

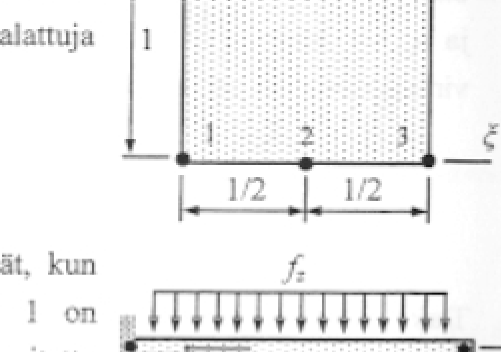


4. Määritä kuvan Bernoulli tasopalkin kiertymä oikeassa päässä, kun käytetään yhtä (kaksisolmuista) palkkielementtiä ja palkkia kuormittaa vakiotilavuusvoima, jonka komponentit ovat $f_x = f_z = f$. Kappalekoordinaatiston x-akseli sijaitsee palkin alapinnalla ja tuenta estää vaakasuuntaisen siirtymän x-akselin kohdalla. Materiaalin kimmokerroin on E.

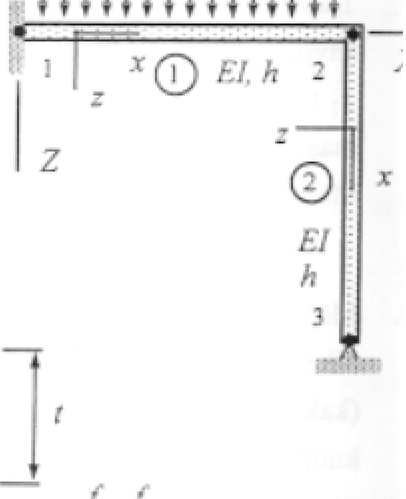


5. Kuvan levystä ja vetosauvasta koostuvaan rakenteeseen vaikuttaa vaakasuuntainen voima F solmussa 1. Materiaalivakiot ovat E ja ν, levyn paksuus on t ja sauvan poikkileikkauksen pinta-ala A. Käytä yhtä kaksisolmuista lineaarista sauvaelementtiä ja yhtä lineaarista tasojännitystilan

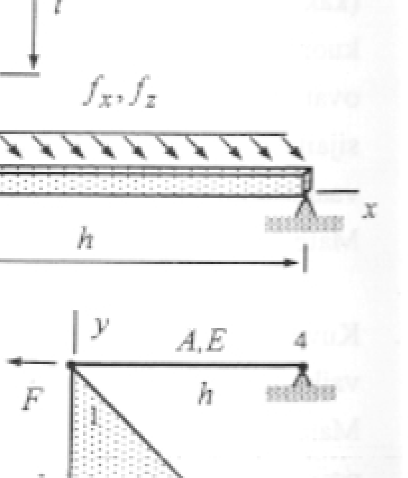
Kul-49.3300 Elementtimenetelmä I, tentti, 16.05.2008



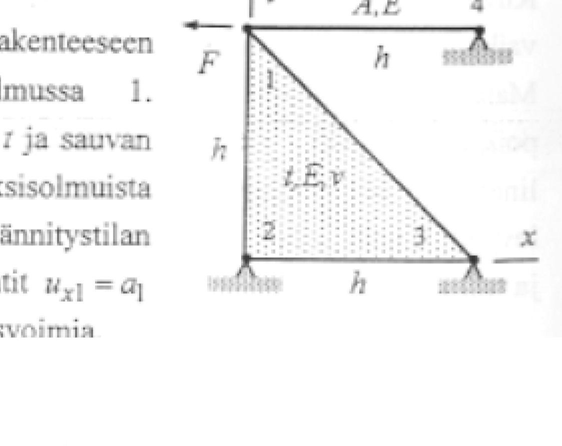
1. Kokoa kuvan sauvarakenteen systeemiyhtälöt $\mathbf{R} = \mathbf{Ka} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Käytä kolmea lineaarista sauvaelementtiä ja kahta "pistekuormaelementtiä". EA on sama kaikille sauvoille.



2. Muodosta kuvan viisisolmuisen elementin muotofunktioiden $N_1^e, N_2^e, N_3^e, N_4^e, N_5^e$ lausekkeet käyttäen skaalattuja koordinaatteja ξ ja η.



3. Määritä kuvan palkkirakenteen solmusiirtymät/kiertymät, kun palkit ovat täysin jäykkiä aksiaalisuunnassa. Palkki 1 on kiinnitetty jäykästi seinään ja palkki kaksi on kiinnitetty nivelellä lattiaan. Käytä systeemiyhtälöiden ja elementtiosuuksien variaatiomuotoja $\delta W = \sum \delta W^e = 0$ ja $\delta W^e = -(\delta \mathbf{a}^e)^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}^e\mathbf{a}^e - \mathbf{F}^e)$ Bernoulli tasopalkille (vain taivutuksella xz-tasossa on merkitystä tehtävässä.



4. Määritä kuvan Bernoulli tasopalkin kiertymä oikeassa päässä, kun käytetään yhtä (kaksisolmuista) palkkielementtiä ja palkkia kuormittaa vakiotilavuusvoima, jonka komponentit ovat $f_x = f_z = f$. Kappalekoordinaatiston x-akseli sijaitsee palkin alapinnalla ja tuenta estää vaakasuuntaisen siirtymän x-akselin kohdalla. Materiaalin kimmokerroin on E.

5. Kuvan levystä ja vetosauvasta koostuvaan rakenteeseen vaikuttaa vaakasuuntainen voima F solmussa 1. Materiaalivakiot ovat E ja ν, levyn paksuus on t ja sauvan poikkileikkauksen pinta-ala A. Käytä yhtä kaksisolmuista lineaarista sauvaelementtiä ja yhtä lineaarista tasojännitystilan levyelementtiä ja laske solmun 1 siirtymäkomponentit $u_{x1} = a_1$ ja $u_{y1} = a_2$. Rakenteeseen ei vaikuta ulkoisia tilavuusvoimia.

Kul-49.3300 Elementtimenetelmä I; kaavoja

ELEMENTTIOSUUKSIA (vakiokuorma)

Sauva (veto) : $\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{Bmatrix} - \frac{f_x h}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{h}\begin{bmatrix} \mathbf{nn}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{nn}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{nn}^{\mathrm{T}} & \mathbf{nn}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} - \frac{f_x h}{2}\begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix}, \text{ jossa } \mathbf{n} = \frac{1}{h}\{\Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z\}^{\mathrm{T}}$$

Sauva (vääntö) : $\begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} - \frac{m_x h}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Palkki (taivutus) : $\begin{Bmatrix} F_{z1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 12 & -6h & -12 & -6h \\ -6h & 4h^2 & 6h & 2h^2 \\ -12 & 6h & 12 & 6h \\ -6h & 2h^2 & 6h & 4h^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{z1} \\ \theta_{y1} \\ u_{z2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} - \frac{f_z h}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix}$

ELEMENTTIAPPROKSIMAATIOITA

Palkki : $w = \begin{Bmatrix} (1-x/h)^2(1+2x/h) \\ -h(1-x/h)^2(x/h) \\ (3-2x/h)(x/h)^2 \\ -h(x/h)^2(x/h-1) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} u_{z1} \\ \theta_{y1} \\ u_{z2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}$

RAJOITEYHTÄLÖITÄ

Kitkaton taso : $\vec{n}\cdot\vec{u}_{\mathrm{A}} = 0$

Nivel : $\vec{u}_{\mathrm{B}} = \vec{u}_{\mathrm{A}}$

Jäykkä kappale : $\vec{u}_{\mathrm{B}} = \vec{u}_{\mathrm{A}} + \vec{\theta}_{\mathrm{A}} \times \vec{\rho}_{\mathrm{AB}}$ & $\vec{\theta}_{\mathrm{B}} = \vec{\theta}_{\mathrm{A}}$

VIRTUAALISEN TYÖN PERIAATE

Virt. työn periate : $\delta W = \int_\Omega \delta \bar{w}\, d\Omega = -(\delta\mathbf{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ka} - \mathbf{F})$ & $\delta W = \sum_{e\in E} \delta W^e = 0 \ \ \forall \delta\mathbf{a}$

Geom. suureet : $S_\alpha = \int_A \alpha\, dA \quad \alpha \in \{y,z\}$ & $I_{\alpha\beta} = \int_A \alpha\beta\, dA \quad \alpha,\beta \in \{y,z\}$ & $J = I_{yy} + I_{zz}$

Sauva (veto) : $\delta\bar{w} = -\delta u_{,x} EA u_{,x} + \delta u f_x$

Sauva (vääntö): $\delta\bar{w} = -\delta\theta_{,x} GJ \theta_{,x} + \delta\theta m_x$

Palkki (taivutus) : $\delta\bar{w} = -\delta w_{,xx} EI w_{,xx} + \delta w f_z$

Palkki : $\delta\bar{w} = -\begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,xx} \\ \delta w_{,xx} \\ \delta\theta_{,x} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} EA & -ES_y & -ES_z & 0 \\ -ES_y & EI_{yy} & EI_{yz} & 0 \\ -ES_z & EI_{zy} & EI_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,xx} \\ w_{,xx} \\ \theta_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta\theta \\ -\delta w_{,x} \\ \delta v_{,x} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} f_x A \\ f_y A \\ f_z A \\ -S_z f_y + S_y f_z \\ S_z f_x \\ -S_y f_z \end{Bmatrix}$

Levy (tasojännitys) : $\delta\bar{w} = -\frac{Et}{1-\nu^2}\begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + t\begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$

Laatta : $\delta\bar{w} = -\begin{Bmatrix} \delta w_{,xx} \\ \delta w_{,yy} \\ 2\delta w_{,xy} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} - \frac{12}{t^2}\begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + t\begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}$

$$\mathbf{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Kappale : $\delta\bar{w} = -(\delta\boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + (\delta\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$ ($\nu' = 1/2 - \nu$ & $\nu'' = 1 - \nu$ & $\mathbf{f} = \{f_x \quad f_y \quad f_z\}^{\mathrm{T}}$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \nu'' & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu'' & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & \nu'' & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \nu' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu' \end{array}\right]\boldsymbol{\gamma} \quad \& \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}\mathbf{u} \quad \& \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$