

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi, tutkinto-ohjelmasi (AUT, TFM, TIK, INF, TUO, KON, ENE, KEM, MTE, PUU, ARK, MAR, GMA, KTA, RYT, RRT, YJR, BIO, EST, TLT, ms.) sekä ym. tiedot!

Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + 2y^2$.
 - (a) Määritä funktion f paikalliset ääriarvot sekä niiden laatu.
 - (b) Määritä funktion f pienin ja suurin arvo joukossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. Määritä funktion $f(x, y) = x + 2y$ pienin ja suurin arvo, kun $x^2 + 6y^2 = 5$, käyttäen Lagrangen kertojaa. Perustele lyhyesti, miksi pienin ja suurin arvo saavutetaan.

3.

- (a) Laske integraali

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{y}{y+1} dy dx.$$

Integroimisjärjestyksen vaihdosta saattaa olla iloa. Piirrä kuva integroimisalueesta.

- (b) Laske yksikköpallon $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ tilavuus **integroimalla**.
4. Olkoon $f = ye^{-y}\mathbf{i} + (xe^{-y} - xye^{-y} + \cos(y))\mathbf{j}$.
 - (a) Määritä vektorikentän f se potentiaalifunktio, jonka arvo origossa on 2.
 - (b) Laske viivaintegraali $\int_C f \cdot dr$, missä C on käyrä $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ pisteestä $(0, 1)$ pisteeseen $(1, 0)$.

$$\rho \leq 1$$

$$\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = \rho$$