

Tehtävä 1

- a) Lenzin laki: Muuttuvassa magneettikentässä olevaan virtasilmukkaan indusoitunut sähkömotorinen voima on sellainen, että siihen liittyvän virran aiheuttama magneettikenttä vastustaa magneettivuon muutosta. **(1p)**
- b) Virtasilmukan synnyttämä magneettivuoto on verrannollinen silmukassa kulkevaan virtaan: $\Phi_M = LI$. Verrannollisuuskertoimen L on itseisinduktanssi ja se kuvaa silmukan kykyä tuottaa magneettivuoto tietyllä virralla. **(1p)**
Pisteen saa myös, jos on tulkinnut itseisinduktanssin suureeksi joka kuvaa virtasilmukan kykyä varastoida magneettikentän energiaa: $W = LI^2/2$.
- c) Poyntingin vektori määrittää sähkökentän voimakkuuden ja magneettikentän voimakkuuden ristitulona $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ **(1/2p)**. Poyntingin vektori kuvaa paljonko *hetkellisesti* sähkömagneettisen säteilyn energiaa menee pinta-alayksikön läpi aikayksikössä **(1/2p)**. Mikäli "hetkellisesti" puuttuu niin **(1/4p)**.
- d) Hiukkasen aaltoluonne saadaan esille tutkimalla liittyykö hiukkasiin joitain aalloille ominaisia ilmiöitä kuten Braggin diffraktio. **(1p)**
- e) Fotoni on sähkömagneettisen kentän hiukkanen **(1/4p)**. Sillä ei ole *massaa*, *energia* on $E = hf$, jossa f on sähkömagneettisen kentän taajuus, *liikemäärä* on $p = E/c$. (jokaisesta oikeasta ominaisuudesta **1/4p**).
- f) Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen mukaan kvanttimekaanisen hiukkasen paikkaa ja liikemäärää ei voida tietää tarkasti samanaikaisesti: $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ **(1/2p)**. (Myöskään energiaa ja aikaa ei voi tietää samanaikaisesti: $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$). Epätarkkuusperiaate on seurausta hiukkasen aaltopakettiesityksestä **(1/2p)**.

Tehtävä 2

a) - Valitaan sylinterikoordinaatisto (r, φ, z)

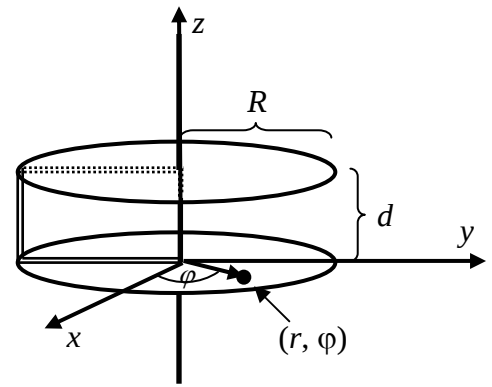
- Potentiaali ero levyjen välissä

$$V(t) = V_0 \sin(2\pi ft)$$

- Sähkökenttä

$$\mathbf{E}(t) = \frac{V(t)}{d} \bar{e}_z = \frac{V_0}{d} \sin(2\pi ft) \bar{e}_z \quad (1/2p)$$

(Jos kenttä on laskettu lausekkeesta $\mathbf{E} = -\nabla V$ niin 0p)



- Ampere-Maxwellin laki:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} 2\pi f \cos(2\pi ft) \bar{e}_z \quad (1/2p)$$

- Sylinterikoordinaatistossa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \bar{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \bar{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right] \bar{e}_z$$

- Symmetrian perusteella $\mathbf{B}$ ei riipu koordinaateista φ ja z

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial r} \bar{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \bar{e}_z \quad (1p)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \Rightarrow B_z = \text{vakio} = 0 \text{ (ei kenttää kondensaattorin ulkopuolella)} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} 2\pi f \cos(2\pi ft) \end{cases} \quad (1/2p)$$

$$\Rightarrow \int d(r B_\varphi) = \int \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} 2\pi f \cos(2\pi ft) r dr$$

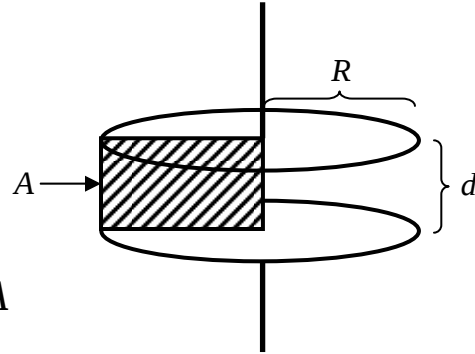
$$r B_\varphi = \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \pi f \cos(2\pi ft) r^2 + D$$

$$B_\varphi = \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \pi f \cos(2\pi ft) r + \frac{D}{r} \quad \text{oltava } D = 0, \text{ jotta } B_\varphi \text{ ei divergoi } r = 0 \text{ :ssa} \quad (1p)$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \pi f \cos(2\pi ft) r \bar{e}_\varphi \quad (1/2p)$$

2. b) Faradayn lain mukaan indusoitunut jännite on

$$E_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (1\text{p})$$



$$E_{\text{ind}} = N \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = N \int_A \frac{dB}{dt} dA$$

$$= N \int_{r=0}^R \int_{z=0}^d \frac{d}{dt} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \pi f \cos(2\pi ft) r \right) dz dr$$

$$= N \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \pi f \frac{d}{dt} [\cos(2\pi ft)] \int_{r=0}^R r dr \int_{z=0}^d dz$$

$$= -N \mu_0 \epsilon_0 V_0 \pi^2 f^2 R^2 \sin(2\pi ft)$$

$$= -5.5 \cdot 10^{-5} \sin(6.3 \cdot 10^4 t) V$$

Lasku oikein **(1p)**,
idea ok, mutta pieni/pieniä laskuvirheitä **(1/2p)**

Tehtävä 3

- a) Maxwellin yhtälöt differentiaalimuodossa:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

jokaisesta oikeasta **1/4p** (kaikki ok 1p)

Suureet:

E on sähkökentän voimakkuus

H on magneettikentän voimakkuus

B on magneettivuon tiheys

D on sähkövuon tiheys

J on virran tiheys

ρ on varaustiheys

kaikki ok **1p**,
puuttuvista ja virheellisistä **-1/4p**.
Max 1p, min 0p.

b)

tulkinnat

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

sähkökentän lähde on varaustiheys (**1/2p**)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

magneettisia monopoleja ei ole löydetty (**1/2p**)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

muuttuva magneettikenttä aiheuttaa sähkökentän pyörteen (**1/2p**)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

virrantiheys sekä muuttuva sähkökenttä aiheuttavat magneettikentän pyörteen (**1/2p**)

Tulkinnat nähdään vaikkapa seuraavasti

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{V}$$

S on pinta joka rajoittaa tilavuutta V

jos raja-arvo on erisuuri kuin nolla on ko. kohdassa oltava **D**:n lähde

$$\nabla \times \mathbf{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{n}}{S} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

C on käyrä joka rajoittaa pintaa S

jos raja-arvo on erisuuri kuin nolla on ko. kohdassa oltava jotain joka aiheuttaa **E**:n pyörteen

Yo. tavalla tai muuten oikein perustellusta lähde-tulkinnasta **1/2p** ja pyörrelähde-tulkinnasta **1/2p**.

c)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_M$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{J}_M - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Magneettisten monopolioiden aiheuttamat muutokset Maxwellin yhtälöihin on merkitty keltaisella. Yhtälöihin tulee siis magneettisten monopolioiden tiheys ρ_M (**1/2p**) sekä magneettisten monopolioiden virrantiheys $\mathbf{J}_M$ (**1/2p**).

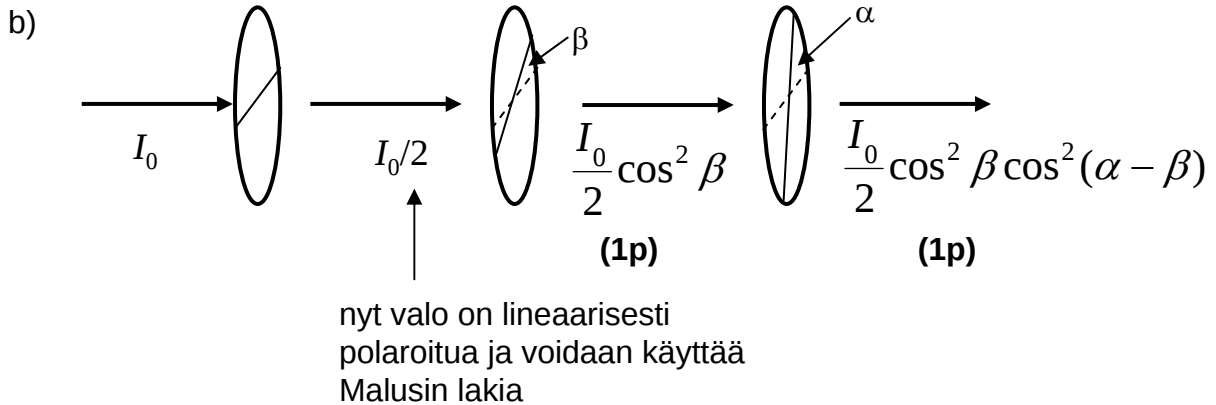
Tehtävä 4

- a) Lähtökohtana on Malusin laki $I = I_0 \cos^2 \theta$ **(1p)**

Polaroimattomassa valossa on kaikkia polarisaatiosuuntia yhtä paljon.

Yhdestä polarisaattorista läpi mennyt intensiteetti saadaan keskiarvona kulman θ yli.

$$I = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} I_0 \quad \textbf{(1p)}$$



Millä β :n arvolla läpimennyt intensiteetti on suurimmillaan?

$$\frac{dI}{d\beta} = I_0 \cos \beta \cos(\alpha - \beta) [-\sin \beta \cos(\alpha - \beta) + \cos \beta \sin(\alpha - \beta)] = 0 \quad \textbf{(1/2p)}$$

Tapaukset $\beta = \pm\pi/2$ ja $\alpha - \beta = \pm\pi/2$ antavat läpimenneeksi intensiteettiä nollan joten nämä vastaavat minimejä. **(1/2p)**

Maksimi ulostulo kun

$$\sin \beta \cos(\alpha - \beta) = \cos \beta \sin(\alpha - \beta)$$

$$\tan \beta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$\beta = \alpha / 2 \quad \textbf{(1/2p)}$$

Läpimennyt intensiteetti on tällöin $I_{\max} = \frac{I_0}{2} \cos^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad \textbf{(1/2p)}$

Tehtävä 5

Vapaan hiukkasen yksidimensioinen Schrödingerin yhtälö on muotoa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \quad (1/2p)$$

Separoidaan muuttujat eli tehdään yrite $\Psi(x,t) = \psi(x) f(t)$ (1/2p)

Sijoitus Schrödingerin yhtälöön

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} f(t) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} &= i\hbar \psi(x) \frac{\partial f(t)}{\partial t} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} &= i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Vasen puoli riippuu vain x :stä ja oikea puoli vain t :stä. Molempien puolien on oltava sama vakio. Merkitään tätä vakiota G :llä. (1p)

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = G & (1/2p) \\ i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = G & (1/2p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k^2 \psi(x) = 0, \text{ jossa } k = \frac{2mG}{\hbar^2}$$

$$\text{ja } \frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{iG}{\hbar} f(t) \Rightarrow f(t) = e^{-iGt/\hbar} = e^{-i\omega t} \text{ jossa } \omega = \frac{G}{\hbar} \quad (1/2p)$$

Paikkariippuvaa osaa kuvaava differentiaaliyhtälö on lineaarinen ja homogeeninen ensimmäisen kertaluvun diffis ja sen yleinen ratkaisu on

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (1/2p)$$

Kokonaisaaltofunktion yleinen muoto on siis $\Psi(x,t) = \psi(x) f(t)$

$$= Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)} \quad (1p)$$

Tulkinta: Ensimmäinen termi kuvaa $+x$ -suuntaan etenevää hitua
ja jälkimmäinen $-x$ -suuntaan etenevää hitua (1p)