Mat-2.148 Dynaaminen optimointi Karelahti / Hytönen

Tentti 10.5.2005

Kirjoita koepapereihin selvästi

- Mat–2.148 Dynaaminen optimointi, tentti 10.5.2005
- opintokirjan n:ro, TEKSTATEN sukunimi, viralliset etunimet (puhuttelunimi alleviivaten)
- koulutusohjelma (ei osasto), vuosikurssi
- nimikirjoitus

1. Määrittele lyhyesti, mutta täsmällisesti (formuloi)

   a) Takaisinkytketty ohjaus
   b) Dimensionaalisuuden kirous
   c) Variaatiolaskennan peruslause
   d) Nykyarvoliittotila
   e) Stackelbergin tasapainoratkaisu
   f) Differentiaalipeli

2. Olkoon tavoitteena määrätä resurssin $x(t)$ kulutus $u(t)$ siten, että kokonaishyöty

$$\int_0^T \sqrt{u(t)}dt$$

maksimoituu kiinteällä suunnitteluvälillä T. Resurssin määrän muutosta kuvaa yhtälö

$$\dot{x}(t) = -u(t), \quad x(0) = A > 0, \quad x(T) = 0.$$

Ratkaise optimaalinen kulutus

   a) Variaatiolaskennan keinoin (2p)
   b) Diskretoimalla tehtävä ajan suhteen ja soveltamalla dynaamista ohjelmointia (3p)
   c) Vertaile a- ja b-kohdan ratkaisuja (1p)

3. Muodosta funktionaalin

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g\left[x(t), \dot{x}(t), t\right] dt$$

inkrementti ja edelleen variaatio. Johda muodostetun variaation avulla välttämättömät ehdot ekstremaalille, kun $x(t) \in R$, t_0 ja t_f kiinteitä, $x(t_0) = x_0$ kiinteä ja $x(t_f)$ on vapaa.

4. Määritä ekstremaalit funktionaalille

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{x(t)} \right] dt,$$

kun $x(0) = 0$ ja lopputilan $x(t_f)$ täytyy sijaita käyrällä $\theta(t) = t - 5$.
Vihje: $\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{2}x^2(t)\right] = \ddot{x}(t)x(t) + \dot{x}^2(t)$.

5. Lineaarinen systeemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \\ |u(t)| &\leq 1 \end{aligned}$$

halutaan siirtää minimiajassa mielivaltaisesta alkutilasta origoon.

a) Osoita, että systeemin karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksiset (2p).

b) Osoita, että jos optimaalinen ohjaus on olemassa, se on muotoa $|u(t)| = 1$ (4p).