

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3

1. välikoe 14.10.2008

Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja.

1. a) Millä vakion $a \in \mathbf{R}$ arvolla funktio $v(x, y) = x^3 + axy^2$ on harmoninen? Määritä kyseisessä tapauksessa vastaava harmoninen konjugaatitfunktio $u(x, y)$.
- b) Perustele Cauchy-Riemann-yhtälöiden avulla: Jos analyyttisen funktion $f = u + iv$ reaaliosa u on vakiofunktio, niin myös v on vakiofunktio.

2. Laske viivaintegraali

$$\int_C f(z) dz,$$

kun $f(z) = 1/\bar{z}$ ja käyrä C on

- a) jana pisteestä 1 pisteeseen $2 + i$.
- b) puoliympyrän kaari $\{x + iy \in \mathbf{C} \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ pisteestä 2 pisteeseen -2 .

3. a) Määritä funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+3)}$$

Laurent-sarja rengasalueessa $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 3\}$.

- b) Funktiolla

$$f(z) = \frac{\log(1+2z)}{z^2}$$

on yksinkertainen napa pisteessä $z_0 = 0$. Määritä vastaava residy.

4. Laske residylauseen avulla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{4+x^2} dx$$

integroimalla sopivan puoliympyrän reunaa pitkin. Millaiset tulokset saadaan integraalin reaali- ja imaginaariosille? (Voit olettaa tunnetuksi, että kaari-integraali lähestyy nollaa.)