Teknillinen korkeakoulu Alestalo/Pursiainen
Matematiikka

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3

1. välikoe 14.10.2008

Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja.

1. a) Millä vakion $a \in \mathbf{R}$ arvolla funktio $v(x,y) = x^3 + axy^2$ on harmoninen? Määritä kyseisessä tapauksessa vastaava harmoninen konjugaattifunktio $u(x,y)$.
   b) Perustele Cauchy-Riemann-yhtälöiden avulla: Jos analyyttisen funktion $f = u+iv$ reaaliosa u on vakiofunktio, niin myös v on vakiofunktio.

2. Laske viivaintegraali
$$\int_C f(z)\,dz,$$
   kun $f(z) = 1/\overline{z}$ ja käyrä C on
   a) jana pisteestä 1 pisteeseen $2+i$.
   b) puoliympyrän kaari $\{x+iy \in \mathbf{C} \mid x^2+y^2=4,\ y \geq 0\}$ pisteestä 2 pisteeseen -2.

3. a) Määritä funktion
$$f(z) = \frac{1}{z(z+3)}$$
   Laurent-sarja rengasalueessa $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 3\}$.
   b) Funktiolla
$$f(z) = \frac{\log(1+2z)}{z^2}$$
   on yksinkertainen napa pisteessä $z_0 = 0$. Määritä vastaava residy.

4. Laske residylauseen avulla
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{4+x^2}\,dx$$
   integroimalla sopivan puoliympyrän reunaa pitkin. Millaiset tulokset saadaan integraalin reaali- ja imaginaariosille? (Voit olettaa tunnetuksi, että kaari-integraali lähestyy nollaa.)

S3, VK1/2008 RATKAISUT/PA

1. a) $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6x + 2ax \equiv 0$, jos $\underline{\underline{a = -3}}$.

Siis $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

CR: $\begin{cases} u_x = v_y = -6xy \\ u_y = -v_x = -3x^2 + 3y^2 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = \int (-6xy)\,dx$

$= -3x^2 y + g(y)$

Sij. toiseen:

$$-3x^2 + g'(y) = -3x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow g'(y) = 3y^2$$

$\Rightarrow g(y) = y^3 + C$, joten $u(x,y) = \underline{\underline{-3x^2y + y^3 + C}}$, $C \in \mathbb{R}$

b) $u \equiv$ VAKIO

$\Rightarrow \begin{cases} v_x = -u_y \equiv 0 \\ v_y = u_x \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow v(x,y) \equiv$ VAKIO.

---

2. a) $z(t) = 1 + t(2+i-1) = 1 + (1+i)t$, $t \in [0,1]$; $z'(t) = 1+i$

$$\int_C \frac{dz}{\bar z} = \int_0^1 \frac{1}{1+(1-i)t}(1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 \frac{1+(1+i)t}{1+2t+2t^2}$$

← voi laskea neliöön täydentämällä, mutta välivaiheet hankalia

$$= \frac{1+i}{1-i} \Big/_0^1 \log(1+(1-i)t) = i \log(1+(1-i))$$

$$= \underline{\underline{\arctan(1/2) + i\tfrac{1}{2}\ln 5}}$$

b) $z(t) = 2e^{it}$, $t \in [0,\pi]$; $z'(t) = 2ie^{it}$

$$\int_C \frac{dz}{\bar z} = \int_0^\pi \frac{2ie^{it}}{2e^{-it}}\,dt = i\int_0^\pi e^{i2t}\,dt = \frac{i}{2i}\Big/_0^\pi e^{i2t} = \underline{\underline{0}}$$

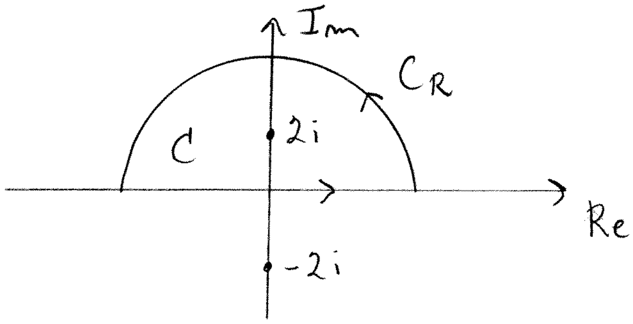
3. a) $$f(z) = \frac{1}{z(z+3)} = \frac{1/3}{z} + \frac{-1/3}{z+3} = \frac{1/3}{z} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+z/3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{9}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-z/3\right)^m = \underline{\underline{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} - \sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{m+2} z^m}}, \quad 0<|z|<3$$

b) $$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z\cdot \log(1+2z)}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\log(1+2z)}{z} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2/(1+2z)}{1} = \underline{\underline{2}}. \quad (\text{l'Hôpital})$$

4. $$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$$



Navat: $z^2 = -4 \iff z = \pm 2i$

Vain $+2i$ jää C:n sisälle

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{\cancel{(z-2i)}\,e^{iz}}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)} = \frac{e^{i\cdot 2i}}{2i+2i} = \frac{1}{4i}e^{-2}$$

Residylause: $$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \frac{\pi}{2}e^{-2}$$

Toisaalta $$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+4}\,dx + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\to 0,\ \text{kun } R\to\infty}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}e^{-2}}}$$

Tulos $\in \mathbb{R}$, joten $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+4}\,dx = 0$$ (pariton funktio!)