

Funktiolaskin sallittu. Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Osatehtävien painoarvo on yhtäsuuri ellei painoja ole erikseen annettu.

Tehtävät

1. Olkoot s, t funktioita $s, t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$s(x) = x + 1, \quad t(x) = 2x.$$

Tarkastellaan yhdistettyjä funktioita st ja ts (merkitään myös $s \circ t$ ja $t \circ s$).

- (a) Onko $st = ts$?
- (b) Ovatko st ja ts bijektioita?
2. Etsi lukujen 2008 ja 1014 suurin yhteinen tekijä $d = \text{sy}(2008, 1014)$ ja etsi kokonaisluvut x ja y siten että $d = 2008x + 1014y$.
3. (a) Etsi ne \mathbb{Z}_{14} :n luvut joilla on kertolaskun käänteisalkio.
- (b) Etsi polynomin $x^{2008} + x^{14} + x^{10} \pmod{3}$ nollassa eroavat juuret eli nol-lakohdat.
4. (a) Olkoon $G = (V, E)$ yhdistetty graafi. Yksinkertainen kierros on kierros, jossa sama solmu voi esiintyä vain kerran. Sivujen relaatio R määritellään seuraavasti: $e_1 R e_2$, jos joko $e_1 = e_2$ tai G :ssä on yksinkertainen kierros, johon sekä e_1 että e_2 kuuluvat ($e_1, e_2 \in E$). Osoita, että R on ekvivalenssi-relaatio.
- (b) Hamiltonin kierroksen solmut ja peräkkäisten solmujen väliset sivut muodostavat aligraafin $H = (\hat{V}, \hat{E})$. Osoita, että jokainen kierroksen solmu, $v \in \hat{V}$, on täsmälleen kahden aligraafin sivun, $e_1, e_2 \in \hat{E}$, päätepiste.