TKK, Matematiikan laitos Rasila/Ahlroth

Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B syksy 2008

Välikoe 1 31.10.2008

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta ja taulukkokirjaa (Mellin).

1. Olkoot $\Pr(A) = 0.6$ ja $\Pr(B) = 0.2$. Määritä tapahtuman $A \cup B$ todennäköisyys tai totea lähtöarvot mahdottomiksi, kun

(a) A ja B ovat toisensa poissulkevia,

(b) A ja B ovat riippumattomia,

(c) $\Pr(A \cap B) = 0.3$,

(d) $\Pr(A|B) = 0.6$,

(e) $\Pr(B|A) = 0.6$,

(f) $\Pr(A|B) = \Pr(B|A)$.

Ratkaisu: Yleisen yhteenlaskulauseen mukaan:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

(a) Jos A ja B ovat toisensa poissulkevia eli $A \cap B = \emptyset$, on $\Pr(A \cap B) = 0$, jolloin
$\Pr(A \cup B) = 0.6 + 0.2 - 0 = 0.8$.

(b) Jos A ja B ovat riippumattomia on $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$, jolloin
$\Pr(A \cup B) = 0.6 + 0.2 - 0.6 \times 0.2 = 0.68$.

(c) Koska $A \cap B \subset B$, saadaan $\Pr(B) \geq \Pr(A \cap B)$. Siksi annetut tiedot ovat ristiriitaisia.

(d) Yleisen tulosäännön mukaan $\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B)\Pr(B)$, jolloin
$\Pr(A \cup B) = 0.6 + 0.2 - 0.6 \times 0.2 = 0.68$.

(e) Yleisen tulosäännön mukaan $\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A)\Pr(A)$, jolloin
$\Pr(A \cup B) = 0.6 + 0.2 - 0.6 \times 0.6 = 0.44$. Tämä on kuitenkin ristiriita, koska $\Pr(A) = 0.6 > 0.44$ ja $A \subset (A \cup B)$.

(f) Koska $\Pr(A|B) = \Pr(A \cap B)/\Pr(A)$ ja $\Pr(B|A) = \Pr(A \cap B)/\Pr(B)$, saadaan

$$\frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Koska $\Pr(A) \neq \Pr(B)$, ainoa vaihtoehto on $\Pr(A \cap B) = 0$. Tämä johtaa a-kohdan tilanteeseen, ja $\Pr(A \cup B) = 0.8$.

2. Valheenpaljastuskoneen luotettavuudesta on käytettävissä seuraavat tiedot: Henkilö, joka valehtelee tulee oikein luokitelluksi valehtelijaksi todennäköisyydellä 0.8 ja henkilö, joka ei valehtele tulee virheellisesti luokitelluksi valehtelijaksi todennäköisyydellä 0.1. Oletetaan, että valheenpaljastuskonetta käytetään ihmisjoukkoon, jossa 4% valehtelee. Mikä on todennäköisyys, että valehtelijaksi luokiteltu henkilö onkin rehellinen?

Ratkaisu: Olkoon

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\text{"Henkilö valehtelee"}\}, \\ B_2 &= \{\text{"Henkilö ei valehtele"}\}, \\ A &= \{\text{"Koneen mukaan henkilö valehtelee"}\}. \end{aligned}$$

Annettujen tietojen perusteella

$$\begin{aligned} \Pr(B_1) &= 0.04, \\ \Pr(B_2) &= 0.96, \\ \Pr(A|B_1) &= 0.8, \\ \Pr(A|B_2) &= 0.1. \end{aligned}$$

Selvästikin $B_1 \cup B_2 = S$ ja $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, joten Bayesin kaavan nojalla saadaan

$$\Pr(B_2|A) = \frac{\Pr(A|B_2)\Pr(B_2)}{\Pr(A|B_1)\Pr(B_1) + \Pr(A|B_2)\Pr(B_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.96}{0.8 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.96} = 0.75.$$

Toisella tavalla: 1000 henkilöä menee valheenpaljastuskokeeseen. Heistä 4% eli 40 ovat valehtelijoita ja loput 960 rehellisiä. Valehtelijoista 80% eli 32 luokitellaan valehtelijoiksi ja rehellisistä 10% eli 96 luokitellaan myös valehtelijoiksi eli yhteensä 128 henkilöä. Silloin todennäköisyys, että valehtelijaksi luokiteltu onkin rehellinen on

$$\frac{96}{128} = 0.75.$$

3. Pakkauksessa on 120 tuotetta, joista 20 on viallisia.

(a) Poimitaan pakkauksesta 5 tuotetta tarkastettavaksi ilman takaisinpanoa. Mikä on todennäköisyys, että tarkastettujen joukossa on tasan 1 viallinen tuote?

(b) Poimitaan pakkauksesta 5 tuotetta tarkastettavaksi takaisinpanolla. Mikä on todennäköisyys, että tarkastettujen joukossa on ainakin 1 viallinen tuote?

Ratkaisu: Okoon satunnaismuuttuja X viallisten tuotteiden lukumäärä tarkastettujen viiden tuotteen joukossa. Satunnaismuuttujan X jakauma riippuu siitä poimitaanko otos ilman takaisinpanoa vai takaisinpanolla. Ensimmäisessä tapauksessa X noudattaa hypergeometrista jakaumaa ja jälkimmäisessä binomijakaumaa.

(a) $X \sim \text{HyperGeom}(120, 20, 5)$ jolloin pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = \frac{\binom{20}{x}\binom{120-r}{5-x}}{\binom{120}{5}},$$

ja pyydetty todennäköisyys:

$$\Pr(X = 1) = f(1) = \frac{\binom{20}{1}\binom{120-20}{5-1}}{\binom{120}{5}} \approx 0.412.$$

(b) Tarkastellaan komplementtitapahtumaa ”ei yhtäkään viallista”. Koska $X \sim \text{Bin}(5, 1/6)$, saadaan pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = \binom{5}{x} 0.1667^x \cdot 0.8333^{5-x}$$

ja pyydetty todennäköisyys:

$$1 - f(0) = 1 - \binom{5}{0} 0.1667^0 \cdot 0.8333^5 \approx 0.598.$$

4. Olkoot kaksiulotteisen diskreetin jakauman pistetodennäköisyydet

$$\Pr(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{8} \qquad \Pr(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{8}$$
$$\Pr(X = -1, Y = 0) = \frac{3}{8} \qquad \Pr(X = 0, Y = -1) = \frac{1}{8}$$

(a) Ovatko X ja Y korreloimattomia?

(b) Ovatko X ja Y riippumattomia?

(c) Määritä $\text{E}(X|Y = 0)$.

Ratkaisu: Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman ja reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktiot:

f_{XY}	-1	0	1	f_Y
1	0	3/8	0	3/8
0	3/8	0	1/8	1/2
-1	0	1/8	0	1/8
f_X	3/8	1/2	1/8	1

Tässä reunajakaumat on laskettu seuraavilla kaavoilla:

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y) \qquad f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

Eli esimerkiksi

$$f_X(1) = f_{XY}(1, 1) + f_{XY}(1, 0) + f_{XY}(1, -1) = 0 + \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$$

(a) Lasketaan

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = -1 \times 3/8 + 0 \times 1/2 + 1 \times 1/8 = -1/4.$$

Samoin saadaan $E(Y) = -1/4$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \sum_x \sum_y (x - \mathrm{E}(X))(y - \mathrm{E}(Y)) \Pr(X = x, Y = y) \\
&= (-1 + 1/4)(0 + 1/4)(3/8) + (0 + 1/4)(-1 + 1/4)(1/8) \\
&\quad + (0 + 1/4)(1 + 1/4)(3/8) + (1 + 1/4)(0 + 1/4)(1/8) \\
&= 1/16.
\end{aligned}
$$

Siis satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole korreloimattomia.

(b) Satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole korreloimattomia, joten ne eivät ole riippumattomia. Tämä voidaan nähdä myös suoraan määritelmästä, esimerkiksi $f_{XY}(1,1) \neq f_X(1) f_Y(1)$.

(c) Kaavasta

$$
f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}
$$

saadaan:

$f_{X\|Y}$	-1	0	1
1	0	1	0
0	3/4	0	1/4
-1	0	1	0

Lasketaan

$$
\mathrm{E}(X|Y = 0) = \sum_x x f_{X|Y}(x|0) = -1 \cdot 3/4 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1/4 = -1/2.
$$