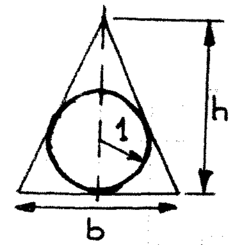
Mat.-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1
Mellanförhör nr 2, 2003-11-10

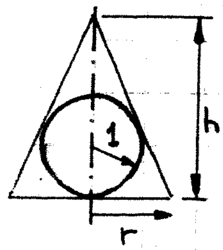
Texta på varje papper
- **studieperiod, datum**
- **studiekortets nr+bokst.. släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram** (ARK,AUT,BIO,...,TLT,TUO,YHD)
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.



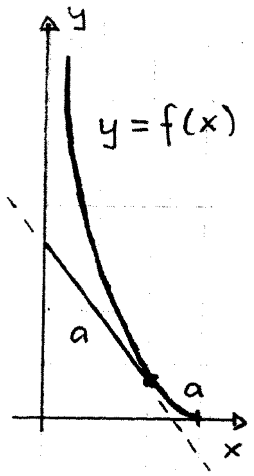
1a) Visa att av alla likbenta trianglar, i vilken en cirkel med radien 1 får plats, är det den liksidiga triangeln med höjden 3, som har den minsta arean.

b) Nu attackerar vi motsvarande problem i 3 dimensioner: Bestäm radien r och höjden h hos den räta cirkulära konen med den minsta volymen, i vilken en sfär med radien 1 får plats.



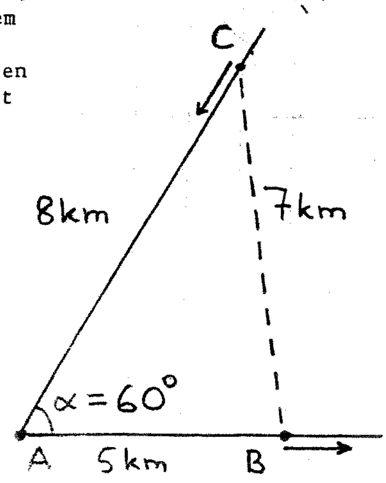
2a) Visa att funktionen $f(x) = a\cdot\ln((a+\sqrt{a^2-x^2})/x) - \sqrt{a^2-x^2}$ har derivatan $f'(x) = -\sqrt{a^2-x^2}/x$. (2p.)

b) Kurvan $y = f(x)$ med f från a)-delen kallas för en traktris, men är mera känd under namnet hundkurvan. Den uppstår då man går längs en rät linje (styrlinjen, y-axeln i figuren till höger) och släpar en motsträvig hund efter sig i ett koppel med längden a. Visa att den delen av varje tangentlinje till kurvan, som begränsas av tangeringspunkten och y-axeln, alltid har längden a. (4p.)



3. Produkten $f\cdot g$ av två funktioner f och g definieras via $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$. Visa att om f och g är differentierbara i punkten x_0 (dvs. om $f'(x_0)$ och $g'(x_0)$ bägge existerar), så är även $f\cdot g$ differentierbar i x_0 och $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$. (Det är alltså deriveringsformeln för en produkt, som skall visas. Räkneregler för gränsvärden får antas vara kända.)

4. Från staden A utgår två vägar, som bildar vinkeln 60^0 som i figuren till höger. På den ena vägen finns en bil B, på avståndet 5km från staden och på väg bort från staden och på den andra vägen finns en cyklist C, på avståndet 8km från staden och på väg in mot staden. Cosinus-satsen ger att avståndet mellan bilen och cyklisten är 7km i just det ögonblicket.
Om cyklisten stod stilla, medan bilen åker, skulle avståndet mellan dem öka, men om bilen stod stilla, medan cyklisten åker, skulle avståndet mellan dem minska i det aktuella ögonblicket.
Bilen åker med hastigheten 55km/h bort från staden. Hur fort skall cyklisten åka in mot staden för att avståndet mellan dem inte skall ändras i just det ögonblicket?



Nyttiga (?) formler:

En triangel med basen b och höjden h har arean $A = bh/2$.
En rät cirkulär kon med radien r och höjden h har volymen $V = \pi r^2 h/3$.
En cirkel med radien R har omkretsen $2\pi R$ och arean πR^2.
En sfär med radien R har arean $4\pi R^2$ och volymen $4\pi R^3/3$.
Cosinus-satsen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\alpha)$.