Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 2' 17.01.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Detta mellanförhör är för J.Lillhannus och R.Salin och det varar i 3 timmar.
Alternativt går det att skriva sluttentamen och då är tiden 4 timmar.
På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo.
Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. a) Bestäm matrisen A:s egenvärden, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) Låt B vara en godtycklig kvadratisk matris. Visa att om λ är ett egenvärde till B, så är λ^2 ett egenvärde till B^2.

2. Produkten $f \cdot g$ av två funktioner definieras via $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Visa att om f och g är differentierbara i punkten x_0 (dvs. om $f'(x_0)$ och $g'(x_0)$ bägge existerar), så är även $f \cdot g$ differentierbar i x_0 och $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$. (Det är alltså deriveringsformeln för en produkt som skall visas. Räkneregler för gränsvärden får antas vara kända.)

3. Hållfastheten hos en takbalk av trä med rektangulärt tvärsnitt är proportionell mot produkten $b \cdot h^2$ av bredden b och kvadraten av höjden h. Av en stock med diametern d sågas en balk med största möjliga hållfasthet. Bestäm bredden och höjden uttryckta i stockens diameter.

4. En differentialekvation på formen $a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$, där $a_2(x), a_1(x)$ och $a_0(x)$ är givna funktioner och $y(x)$ är den sökta funktionen, kallas för en 2:a ordningens linjär, homogen ordinär differentialekvation (ODE).
   a) Visa att om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är lösningar till en 2:a ordningens linjär, homogen ODE, så är även $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ en lösning för godtyckliga val av konstanterna C_1 och C_2.
   b) Om funktionerna a_2, a_1 och a_0 är *konstanter*, ger ansatsen $y(x) = e^{rx}$ alltid en lösning, om konstanten r väljes rätt. Vilka r-värden ger lösningar på formen $y(x) = e^{rx}$ till differentialekvationen $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$?
   c) Kombinera a)- och b)-delen till att bestämma en lösning $y(x)$ till differentialekvationen $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$, som satisfierar begynnelsevillkoren $y(0) = 1, y'(0) = 3$.