Institutionen för matematik
Tekniska högskolan
Metsalo

Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Tentamen 20:edag Knut, 2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

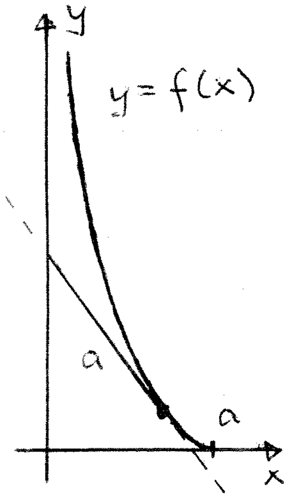
Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni tenterar!
Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. a) $z_1 = 2 - i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Skriv $(\bar{z}_1 + z_2)/(z_1 + \bar{z}_2)$ på formen $a + bi$.
   b) $w = (1 - i)/\sqrt{2}$. Skriv w^{2006} på formen $a + bi$.

2. a) Vad menas med att en mängd vektorer i ett reellt vektorrum är linjärt oberoende?
   b) Undersök om de fyra vektorerna $\vec{a} = [1, 1, 0, 0], \vec{b} = [0, 1, 1, 0], \vec{c} = [0, 0, 1, 1]$ och $\vec{d} = [1, 0, 0, 1]$ i vektorrummet $\mathbf{R}^4$ är linjärt oberoende eller inte.
   c) Kan $\vec{x} = [1, 3, 0, 1]$ skrivas som en linjär kombination av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ och $\vec{d}$? Motivera.

3. Vi approximerar talet $\sqrt[3]{11} (\approx 2.2239801)$. För detta inför vi hjälpfunktionen $g(x) = x^3 - 11$, som ju har ett nollställe i $x = \sqrt[3]{11}$ och approximerar detta nollställe med hjälp av Newtons metod (även känd som Newton-Raphsons metod). Börja med begynnelsevärdet $x_0 = 2 (= \sqrt[3]{8})$ och iterera två gånger, dvs. beräkna iteraten x_1 och x_2. (Det räcker med ett uttryck med enbart tal för x_2. Uttrycket behöver inte förenklas.)

4. a) Visa att funktionen $f(x) = a \cdot \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$ har derivatan $f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. (2p.)
   b) Kurvan $y = f(x)$ med f från a)-delen kallas för en *traktris*, men är mera känd under namnet hundkurvan. Den uppstår då man går längs en rät linje (styrlinjen, y-axeln i den övre fig. t.h.) och släpar en motsträvig hund efter sig i ett koppel med längden a. Visa att den delen av varje tangentlinje till kurvan, som begränsas av tangeringspunkten och y-axeln alltid har längden a.(4p.)



5. Låt f och g vara två funktioner, definierade, kontinuerliga och strängt växande i intervallet $[a, b]$ sådana att $f(a) = g(a) = c > 0, f(b) = g(b) = d$ och $f(x) > g(x)$ för $a < x < b$ som i den nedre figuren till höger. Då har f och g inversfunktionerna f^{-1} resp. g^{-1}, som är def., kont. och str. växande i intervallet $[c, d]$ sådana att $f^{-1}(c) = g^{-1}(c) = a, f^{-1}(d) = g^{-1}(d) = b$ och $g^{-1}(y) > f^{-1}(y)$ för $c < y < d$.
   Då det i figuren skuggade området, som begränsas av kurvorna $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ och $y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$, roterar kring x-axeln, uppstår en rotationssymmetrisk kropp. Tvärsnittsmetoden ger att dess volym är $V_1 = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2)dx$, medan metoden med cylindriska skal ger att volymen är $V_2 = \int_c^d 2\pi y(g^{-1}(y) - f^{-1}(y))dy$. Dessa två integraler borde naturligtvis ge samma värde, eftersom det ju rör sig om en och samma volym. Visa att $\int_c^d 2\pi y(g^{-1}(y) - f^{-1}(y))dy = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2)dx$.
   (Gott råd: använd variabelsubstitution och partiell integrering.)