Mat.-1.431 Grundkurs i matematik I

Tentamen, 2002-09-02

Metsalo

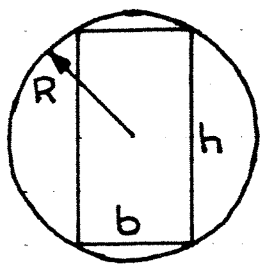
Texta på varje papper:
- studieperiod, tentamen, datum
- studiekortets nr+bokst. släktnamnet **understreckat**, **alla förnamn**
- utbildningsprogram (ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAK, MAA, MAR, PUU, RYK, TIK, TLT, TUO)
- eventuella tidigare namn och utbildningsprogram
- komplettera med namnteckning

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1. Visa, att $1^2\cdot 2^1 + 2^2\cdot 2^2 + 3^2\cdot 2^3 + 4^2\cdot 2^4 + \ldots + n^2\cdot 2^n =$
$= (n^2 - 2n + 3)\cdot 2^{n+1} - 6$ för $n = 1,2,3,\ldots$.

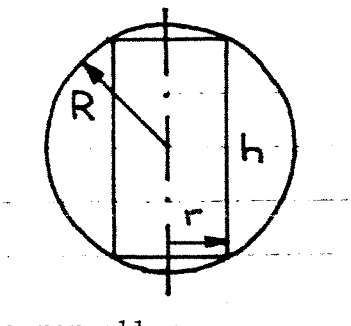
2a) Låt A vara en $n\times n$-matris. Visa, att om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är λ^2 ett egenvärde till matrisen A^2.

b) Låt A vara en inverterbar $n\times n$-matris. Visa, att i så fall är även A:s transponatmatris A^T inverterbar och att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.



3a) Visa, att av alla rektanglar, som får plats i en cirkel med radien R, är det kvadraten med basen b = höjden $h = \sqrt{2}\cdot R$, som har största arean.

b) Nu attackerar vi motsvarande problem i 3 dimensioner: bestäm radien r och höjden h hos den räta cirkulära cylindern med största volymen, som får plats i en sfär med radien R.



4. Antag, att funktionen $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är tre gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av origo och att $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$ och $f'''(0) = 4$. Låt $g(x) = 1/f(x)$. Då är även $g(0) = 1$. Beräkna $g'(0)$, $g''(0)$ och $g'''(0)$.

5. Undersök, huruvida den generaliserade integralen konvergerar eller divergerar samt bestäm dess värde i händelse av konvergens:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x+x^2}$