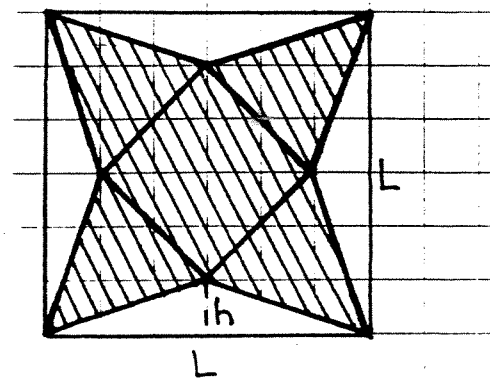


**Texta på varje papper**

- studieperiod, tentamen, datum
- studiekortets nr+bokst., släktnamnet understrekat, alla förnamn
- utbildningsprogram (AUT,TFY,TIK,TUO,SÅH,KON,KEM,MAK,PUU,MAA,RYK)
- eventuella tidigare namn och utbildningsprogram
- komplettera med namnteckning

1. Låt  $A$  vara en kvadratisk matris. Visa, att om  $\lambda$  är ett egenvärde till matrisen  $A$ , så är  $\lambda^n$  ett egenvärde till matrisen  $A^n$  för  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

2. Svatta har en pappkvadrat med sidlängden  $L$ . Om hon klipper bort fyra likbenta trianglar med höjden  $h$  från kvadratens sidor, kan hon vika resten av kvadraten (skuggad i figuren till höger) till en pyramid med kvadratisk botten genom att vika upp de fyra återstående likbenta trianglarna så att de bildar pyramidens sidor.



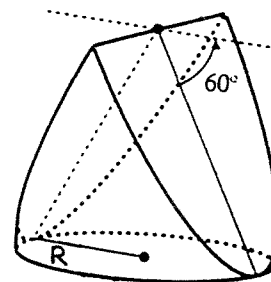
Vilket förhållande mellan  $h$  och  $L$  maximerar pyramidens volym och hur stor är denna maximala volym? (En pyramid med basarean  $A$  och höjden  $h$  har som bekant volymen  $V = Ah/3$ .)

3a) Visa reduktionsformeln  $\int x^n \cdot e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot x^n \cdot e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \cdot \int x^{n-1} \cdot e^{\alpha x} dx$  för  $\alpha \neq 0$  och  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

b) Visa reduktionsformeln  $\int x^n \cdot (\ln x)^m dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot (\ln x)^m - \frac{m}{n+1} \cdot \int x^n \cdot (\ln x)^{m-1} dx$  för  $m = 1, 2, 3, \dots$  och  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

c) Beräkna  $\int_1^e x^3 \cdot (\ln x)^2 dx$ .

4. Kroppen i figuren till höger är utskuren ur en vertikal cylinder med radien  $R$  med hjälp av två plan, som bildar vinkeln  $60^\circ$  med horisontalplanet. Beräkna kroppens volym.



(Gott råd: använd tvärsnittsmetoden / skivformeln och vertikala tvärsnitt.)

5. Visa, att om två parallella plan på avståndet  $h$  från varandra skär en sfär med radien  $R \geq h/2$ , så kommer den delen av sfären, som finns mellan planen alltid att ha arean  $2\pi Rh$ .