Mat.-1.431 Grundkurs i matematik I Metsalo

Tentamen, 2002-04-06

Texta på varje papper:
- studieperiod, tentamen, datum
- studiekortets nr+bokst.. släktnamnet understreckat, alla förnamn
- utbildningsprogram (ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAK, MAA, MAR, PUU, RYK, TIK, TLT, TUO)
- eventuella tidigare namn och utbildningsprogram
- komplettera med namnteckning

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1a) Visa att det inte finns några reella tal α och β sådana att $\frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

b) Ge två komplexa tal α och β sådana att $\frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

2a) En kvadratisk matris A sådan att $A^2 = A$ kallas <u>idempotent</u>.
Visa att en idempotent matris endast kan ha egenvärdena 0 och 1.

b) Låt $\bar{a}$ och $\bar{b}$ vara två n-kolumnvektorer sådana att $\bar{a}^T\bar{b} = \bar{a}\cdot\bar{b} \neq 0$.
Visa att projektionsmatrisen $P = I - \frac{1}{\bar{a}^T\bar{b}}\bar{b}\bar{a}^T$ är idempotent.

3) Antag, att funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är tre gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av origo och att $f(0)=1$, $f'(0)=2$, $f''(0)=3$ och $f'''(0)=4$.
Låt $g(x) = 1/f(x)$. Då är även $g(0)=1$. Beräkna $g'(0)$, $g''(0)$ och $g'''(0)$.

4) Kring ett klot med radien R placeras en rak pyramid med kvadratisk botten så, att klotet tangerar pyramidens bas och sidoytor. Hur stor är den minsta möjliga volymen hos en sådan pyramid?
(En rak pyramid med basarean A och höjden h har som bekant volymen $Ah/3$.
Ett klot med radien R har som bekant volymen $4\pi R^3/3$.)

5) Då en sfär skäres med ett plan, bildas två sfäriska kalotter. Visa att volymen hos en sfärisk kalott med höjden h, skuren från en sfär med radien R, är $V = \pi h^2(R - h/3)$.