Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Tentamen, 14.1.2008

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni skriver! Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

I uppgifterna 1, 2, 3 och 5 kan man ANTINGEN lösa a)-delen ELLER b)-delen.
Observera, att delarna ger olika antal poäng!

1a)

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Beräkna i) $A^T - 2B$, ii) $\vec{u}^T B$ och iii) $\vec{u}\vec{v}^T - \vec{v}\vec{u}^T$ (3p.)

1b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

För ett visst värde på parametern α har det linjära ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ oändligt många lösningar. Bestäm detta α-värde samt alla lösningarna till ekvationssystemet för detta α-värde. (6p.)

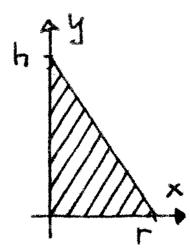
2a) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 4i$. Bestäm i) $iz_1 + 2\overline{z_2}$, ii) $z_1 \cdot z_2$ och iii) z_2/z_1 på formen $x + iy$. (3p.)

2b) För vilka punkter $z = x + iy$ i komplexa talplanet är $\frac{z+6i}{z-8}$ i) reellt, ii) rent imaginärt? (6p.)

3a) Bestäm 2:a gradens Taylor-polynom $P_2(x)$ till $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ utvecklad i punkten $x = 1$. (3p.)

3b) Bestäm punkten på kurvan $x^2y^4 = 1$ i 4:e kvadranten (där $y < 0 < x$), som är närmast origo. (6p.)

4. Då den skuggade triangeln i figuren till höger roterar kring y-axeln, uppstår en rät cirkulär kon med radien r och höjden h. Dess volym är som bekant $V = \pi r^2 h/3$. Bekräfta detta genom att beräkna konens volym mha. i) tvärsnittsmetoden och ii) metoden med cylindriska skal. (6p.) (Märk: i denna uppgift finns det ingen a)- och b)-del. Bägge deluppgifterna kan (och bör!) attackeras.)



5a) Visa att $y(x) = Ce^{-3x}$ är en lösning till differential-ekvationen $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$ för varje val av konstanten C. (3p.)

5b) Bestäm allmänna lösningen till differential-ekvationen $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$ genom att ansätta att lösningen är på formen $y(x) = C(x)e^{-3x}$ för någon (än så länge okänd) funktion $C(x)$, härleda diff.ekvationen som $C(x)$ måste satisfiera för att $y(x)$ skall vara en lösning till den ursprungliga diff.ekvationen, bestämma $C(x)$ genom att lösa denna härledda diff.ekvation och slutligen få den allmänna lösningen $y(x) = C(x)e^{-3x}$. (6p.)