

Mat-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Tentamen 17.01.2005

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

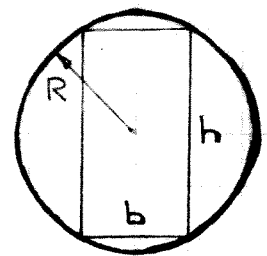
1. Talen a_n definieras via $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$
a) Visa att $1 \leq a_n < 3$ för $n = 1, 2, 3, \dots$, b) Visa att $a_n < a_{n+1}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Beräkna $\det(A)$, b) Beräkna $\text{inv}(A) = A^{-1}$, c) Lös det linjära ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$.

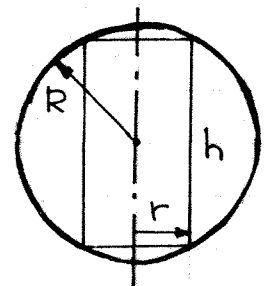
3. a) Visa att av alla rektanglar, som får plats i en cirkel med radien R , är det kvadraten med basen $b =$ höjden $h = \sqrt{2}R$, som har största arean.
b) Nu attackerar vi motsvarande problem i 3 dimensioner: bestäm radien r och höjden h hos den rätta cirkulära cylindern med största volymen, som får plats i en sfär med radien R .



4. Beräkna följande integraler:

a) $\int_0^1 \arctan(x) dx$, b) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 3}$

(Förenkla svaret! Lämna t.ex. inte uttryck på formen $\sqrt{9}$ eller $\cos 0$, utan skriv i stället 3 respektive 1.)



5. Vi tillverkar ett rotationssymmetriskt fat. Dess sida fås genom att rotera kurvan $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ kring den vertikala linjen $x = -1$ och dess botten är en cirkelskiva med radien 1 (se skissen till höger).

Beräkna fatets volym.

(Gott råd: märk, att en rät cirkulär cylinder med radien 1 och höjden 1 ryms i fatet, medan fatet i sin tur ryms i en rät cirkulär cylinder med radien 2 och höjden 1. Detta kan användas som en kontroll av svarets rimlighet.)

