Mat.-1.451 Grundkurs i matematik 1 Metsalo

Tentamen, 2003-01-20

Texta på varje papper
- **studieperiod, tentamen, datum**
- **studiekortets nr+bokst.. släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram** (ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAK, MAA, MAR, PUU, RYK, TIK, TLT, TUO)
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

En mängd M kallas för en GRUPP, om M är utrustad med en binär operation $*$, som satisfierar

A0) $x, y \in M \Rightarrow x*y \in M$.

A1) $(x*y)*z = x*(y*z)$ för alla $x, y, z \in M$.

A2) Det existerar ett (unikt, som det visar sig nedan) enhetselement $e \in M$ sådant att $e*x = x*e = x$ för alla $x \in M$.

A3) För varje $x \in M$ existerar det ett (unikt, som det visar sig nedan) inverst element $x^{-1} \in M$ sådant att $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$.

För grupper gäller bland annat följande två satser:

Sats 1: Enhetselementet i axiom A2 är unikt.

Bevis: Antag, att e_1 och e_2 är två enhetselement.

Då är $e_1 = \{A2,\ e_2 \text{ enhetselement}\} = e_1*e_2 = \{A2,\ e_1 \text{ enhetselement}\} = e_2$.

Sats 2: Inversen till ett element x i en grupp är unik.

Bevis: Antag, att $(x^{-1})_1$ och $(x^{-1})_2$ är inverser till x.

Då är $(x^{-1})_1 = \{A2\} = (x^{-1})_1*e = \{A3,\ (x^{-1})_2 \text{ invers till } x\} = (x^{-1})_1*(x*(x^{-1})_2) =$
$= \{A1\} = ((x^{-1})_1*x)*(x^{-1})_2 = \{A3,\ (x^{-1})_1 \text{ invers till } x\} = e*(x^{-1})_2 = \{A2\} = (x^{-1})_2$.

1a) Visa att $e^{-1} = e$ för varje grupp. Förklara ingående vilket axiom eller resultat som används i varje steg.

b) Visa att $(x^{-1})^{-1} = x$ för varje element i en grupp. Förklara åter ingående.

2. Planet Π går genom punkterna (20,0,3), (0,1,20) samt (−1,8,0).
 a) I vilken punkt skär planet Π z-axeln? (3p.)
 b) Vilken punkt P i planet Π är närmast punkten (0,0,1)? (2p.)
 c) Bestäm avståndet mellan origo och punkten P i b)-delen. (1p.)

3. En stålbehållare på formen av en rät cirkulär cylinder tillverkas av två cirkulära skivor, vilka bildar cylinderns ändor (lock och botten) samt en rektangulär skiva, som böjs till cylinderns mantelyta. Behållaren skall ha den föreskrivna volymen V. Vilket förhållande mellan radien r och höjden h hos cylindern minimerar plåtkostnaden, om kvadratmeterpriset för plåten till mantelytan är 5 gånger så högt som kvadratmeterpriset för plåten till lock och botten?

4. Funktionen f(x) definieras för $-\pi < x < \pi$ via

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - \cos(x))/\sin(x), & 0 < |x| < \pi \\ c & , x = 0 \end{cases}$$

 a) Bestäm konstanten c så att funktionen f är kontinuerlig i hela intervallet $-\pi < x < \pi$.
 b) Visa att med detta val av c är f även deriverbar i origo samt beräkna $f'(0)$.

5a) Beräkna arean hos den rotationssymmetriska ytan som uppstår, då kurvan $y = \cos(x)$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ roterar kring x-axeln.

b) Beräkna volymen hos kroppen innanför ytan i a)-delen.

Nyttiga (?) formler:

$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

Planet $ax + by + cz = d$ har $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ som en normalvektor.

$\int 2(u^2 + a^2)^{1/2}du = u(u^2 + a^2)^{1/2} + a^2\ln(u + (u^2 + a^2)^{1/2}) + C$.