

Texta på varje papper

- studieperiod, tentamen, datum
- studiekortets nr+bokst.. släktnamnet understrekat, alla förnamn
- utbildningsprogram (ARK,AUT,EST,INF,KEM,KON,MAK,MAA,MAR,PUU,RYK,TIK,TLT,TUO)
- eventuella tidigare namn och utbildningsprogram
- komplettera med namnteckning

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1. I vilken punkt skär planet $x - 7y + 5z = 4$ skärningslinjen mellan planerna $x - 3y + 8z = 2$ och $2y + z = 0$?

2a) En kvadratisk matris A sådan att $A^2 = A$ kallas idempotent.

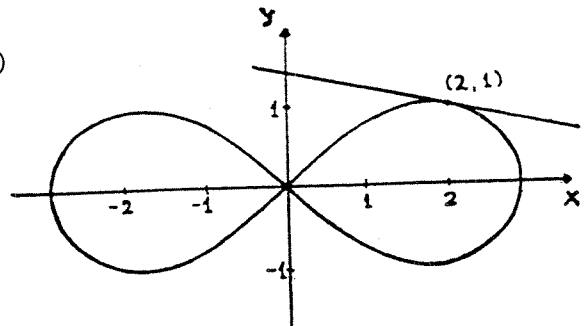
Visa att en idempotent matris endast kan ha egenvärdena 0 och 1.

b) Låt \vec{a} och \vec{b} vara två n -kolumnvektorer sådana att $\vec{a}^T \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$.

Visa att projektionsmatrisen $P = I - \frac{1}{\vec{a}^T \vec{b}} \vec{b} \vec{a}^T$ är idempotent.

3. Grafen av ekvationen $3(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$ är lemniskatan i figuren till höger.

Punkten $(2,1)$ ligger på lemniskatan och ekvationen bestämmer implicit y som en funktion av x i en omgivning av $(2,1)$. Bestäm ekvationen för lemniskatans tangentlinje i punkten $(2,1)$.



4. Avgör huruvida gränsvärdet existerar och beräkna det, om så är fallet:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\ln(x)} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + \sin(3x)}{3x + \sin(2x)} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$

5. Då en sfär skäres med ett plan, bildas två sfäriska kalotter. Visa att volymen hos en sfärisk kalott med höjden h , skuren från en sfär med radien R , är

$$V = \pi h^2 (R - h/3).$$

