

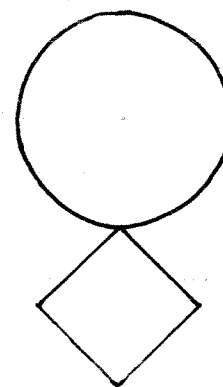
Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Tentamen, 31.3.2007

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni skriver!

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

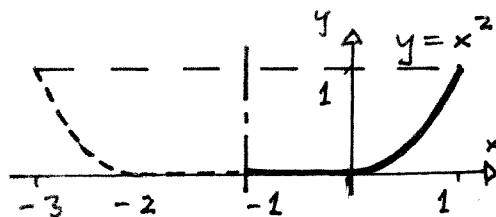


1. Visa att $1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + 4^2 \cdot 2^4 + \dots + n^2 \cdot 2^n = (n^2 - 2n + 3) \cdot 2^{n+1} - 6$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ a) Beräkna $\det(A)$.
b) Beräkna $\text{inv}(A) = A^{-1}$.
c) Lös ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$.

3. En silversmed har en silvertråd och vill av denna göra ett hängsmycke bestående av en cirkel och en under denna hängande kvadrat genom att klippa tråden i två delar, böja den ena delen till cirkeln, den andra till kvadraten och sedan löda ihop dem, som i figuren ovan. Vilket skall förhållandet mellan cirkens diameter och kvadratens sida vara för att cirkelns och kvadratens sammanlagda area skall vara så liten som möjligt?

4. Vi tillverkar ett rotationssymmetriskt fat. Dess sida fås genom att rotera kurvan $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ kring den vertikala linjen $x = -1$ och dess botten är en cirkelskiva med radien 1 (se den övre figuren till höger). Beräkna fatets volym. (Gott råd: märk att en rät cirkulär cylinder med radien 1 och höjden 1 ryms i fatet, medan fatet i sin tur ryms i en rät cirkulär cylinder med radien 2 och höjden 1. Detta kan användas som kontroll av svarets rimlighet.)



5. Då en tank tömms under inverkan av gravitationen genom ett hål i botten, satisfierar vätskedjupet $y(t)$ den separabla differential-ekvationen $A(y) \cdot \frac{dy}{dt} = -k \cdot \sqrt{y}$, där $A(y)$ är tvärsnittsarean vid vätskedjupet y och k är en proportionalitetskonstant. En tank har formen av en rät cirkulär kon med höjden H och radien R , som står på sin spets. Då den fylls med vatten, rinner vattnet ut på tiden T . Sätt upp differential-ekvationen för vattendjupet och bestäm $y(t)$ för $t \in [0s, T]$.

