Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

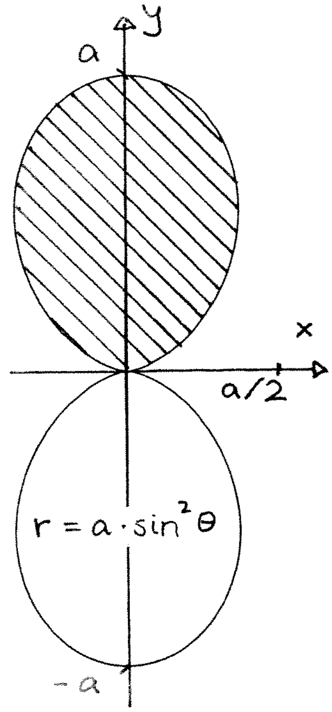
Metsalo

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr. 1, 20.2.2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

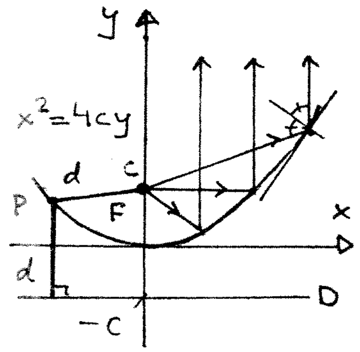
Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. Kurvan, som på polär form ges av $r = a\sin^2\theta$, bildar en åtta som i den övre figuren till höger. Beräkna volymen hos kroppen som uppstår då det i figuren skuggade området roterar kring x-axeln. (Märk: x-axeln, inte y-axeln!)

2. a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n-1})^n = (\frac{1}{1})^1+(\frac{2}{3})^2+(\frac{3}{5})^3+\ldots = 1+\frac{4}{9}+\frac{27}{125}+\ldots$ konvergerar och alltså har en summa S. (2p.)
   b) Visa att $S \in (1.5, 2.5)$, så $S = 2$, korrekt avrundat till närmaste heltal. (4p.)

3. Korkskruven $\bar{r}(t) = a\cos t\bar{\imath} + a\sin t\bar{\jmath} + ct\bar{k}$ hör till teknologens allmänbildning. Kurvan befinner sig på den räta cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = a^2$ och går runt z-axeln.
   a) Bestäm båglängden hos den delen av kurvan, som går från $\bar{r}(0)$ till $\bar{r}(2\pi)$.
   b) Krökningen $\kappa(t)$ hos en kurva $\bar{r}(t)$ ges som bekant av $\kappa(t) = \frac{|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)|^3}$ och krökningsradien $\rho(t)$ av $\rho(t) = 1/\kappa(t)$. Beräkna korkskruvens krökningsradie $\rho(t)$.
   c) Torsionen $\tau(t)$ hos en kurva $\bar{r}(t)$ ges som bekant av $\tau(t) = \frac{(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t))\bullet\bar{r}'''(t)}{|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)|^2}$. Beräkna korkskruvens torsion $\tau(t)$.



4. En parabel i planet med styrlinjen D och brännpunkten $F \notin D$ består av alla punkter P sådana att avståndet FP är lika med avståndet DP. Genom att välja koordinaterna så att parabelns brännpunkt är $F(0, c)$ och styrlinjen $D : y = -c$, blir dess ekvation $x^2 = 4cy$ (se den mellersta figuren till höger). En viktig konsekvens av definitionen är parabelns reflektionsprincip: då en stråle från brännpunkten reflekteras i parabeln, kommer den efter reflektionen att vara ortogonal mot styrlinjen.
   För parabeln gäller också följande
   Sats: Om man drar en linje genom brännpunkten, som skär parabeln i två olika punkter A och B, kommer parabelns tangentlinjer i dessa punkter att vara ortogonala och skära varandra i en punkt på styrlinjen.
   Visa detta! (Gott råd: denna sats är enklast (och elegantast) att visa rent geometriskt med hjälp av parabelns definition och reflektionsprincipen, även om det också går att visa den analytiskt utgående från ekvationen $x^2 = 4cy$.)