Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 1 21.02.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Vi studerar en ellips $\mathcal{E}$ och en hyperbel $\mathcal{H}$ i planet. Ellipsens toppar är hyperbelns brännpunkter och hyperbelns toppar är ellipsens brännpunkter. Ellipsens ekvation är $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Bestäm hyperbelns ekvation samt ekvationerna för dess asymptoter. (Hos kägelsnitt heter 'topp' *vertex* på engelska och 'brännpunkt' heter *focus*.)

2. Vi studerar kurvan som ges av ekvationen $(x^2+y^2)^3 = 27x^2y^2$.
   a) Skriv om ekvationen med hjälp av polära koordinater (1p.)
   b) Skissa kurvan (1p.)
   c) Visa att kurvan får plats i en kvadrat med sidlängden 4 (2p.)
   d) Beräkna arean hos området innanför kurvan (2p.)

3. Serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ är en konvergent överharmonisk serie, så den har alltså en summa S. Bestäm hur stort N måste väljas för att delsumman $s_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4}$ skall approximera summan S med ett fel som är $< 1/1000$.
   (Med metoder från Grundkurs 3 kan man beräkna summan S exakt också: $S = \pi^4/90$. Använd gärna detta för att *kontrollera* svaret.)

4. Rymdkurvan $\bar{r}(t) = t^2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + \ln t\vec{k}$ närmar sig negativa z-axeln, då $t \to 0^+$ och blir alltmer parallell med positiva x-axeln, då $t \to \infty$, eftersom x-koordinaten ökar mycket snabbare än y- och z-koordinaten, då parametern t växer över alla gränser.
   a) Beräkna längden s hos den delen av kurvan, som finns mellan punkten, där kurvan skär xy-planet och punkten, som svarar mot $t = 2$.
   b) Krökningsradien hos en rymdkurva $\bar{r}(t)$ ges som bekant av $\rho(t) = |\bar{r}'(t)|^3/|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)|$. Bestäm minimala krökningsradien ρ_{min} hos vår rymdkurva.
   (Svar: $s \approx 3.69$, $\rho_{min} \approx 2.17$.)

Nyttiga (?) formler:
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 t = (1+\cos(2t))/2$, $\sin^2 t = (1-\cos(2t))/2$,
$\sin(2t) = 2\sin t\cos t$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$,