Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

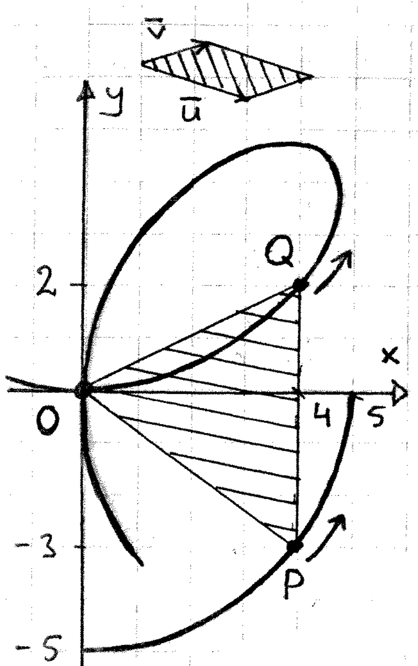
Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

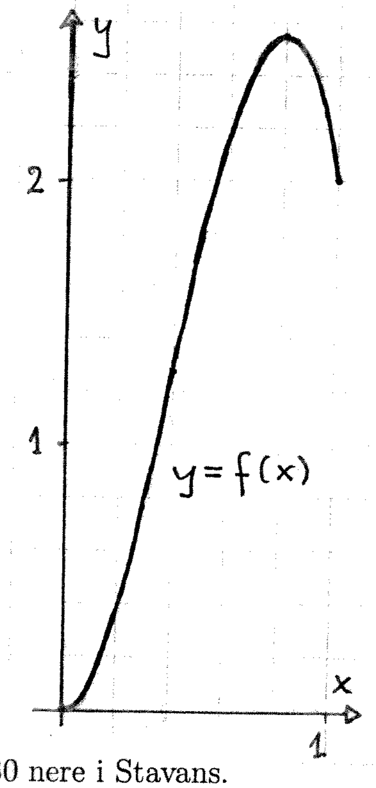
Mellanförhör nr. 2, 21.3.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. En parallellogram, som spänns av två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$, har som bekant arean $|\vec{u} \times \vec{v}|$, så en triangel med hörnpunkterna $O(0,0)$, $P(a,b)$ och $Q(c,d)$ har arean $A = |ad - bc|/2$. Vi studerar en triangel OPQ, där O är fix i origo, P rör sig på cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ och Q rör sig på Cartesii blad $x^3+y^3-9xy = 0$. I ett visst ögonblick är P i punkten $(4,-3)$ och rör sig längs cirkeln så att dess vertikala hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet), medan Q är i punkten $(4,2)$ och rör sig längs Cartesii blad så att dess horisontella hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet). I så fall är triangelns area 10 (areaenheter) i det aktuella ögonblicket.
   a) Hur stor är punkten P:s horisontella hastighet (längdenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? (1p.)
   b) Hur stor är punkten Q:s vertikala hastighet (längdenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? (2p.)
   c) Hur stor är triangelareans ändringshastighet (areaenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? Ökar eller minskar arean just då? (3p.)



2. Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $C^1(\mathbf{R}^2)$, så f och dess partiella derivator av ordning upp tom. 1 är alla kontinuerliga i hela planet. Vi inför polära koordinater r och θ via $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Då är $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r,\theta)$. Visa med hjälp av kedjeregeln att
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2$$

3. I vilken punkt skär tangentlinjen till skärningskurvan mellan ellipsoiden $x^2 + y^2 + 2z^2 = 144$ och den hyperboliska cylindern $2y^2 - z^2 = 36$ i punkten $(6,6,6)$ xy-planet?

4. Vi försöker approximera funktionen $f(x) = 12x^2 - 10x^3$ i intervallet $[0,1]$ med ett 1:agradspolynom $g(x) = ax + b$ så att $J(a,b) = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$ minimeras. Bestäm de värdena på a och b som minimerar $J(a,b)$.

I morgon är det tisdag. Då kan detta mellanförhör diskuteras kl. 13:00-13:30 nere i Stavans.