Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

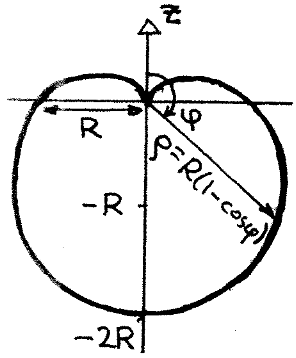
Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr. 3, 25.4.2005

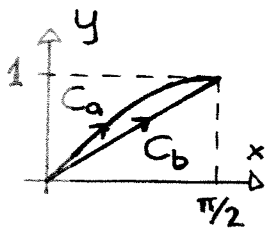
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

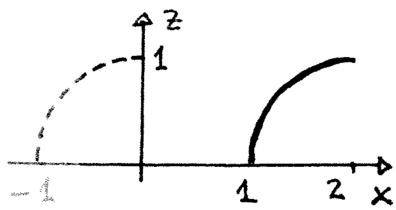
1. Om $f(t)$ och $g(t)$ är reellvärda funktioner av klass C^1, definierade i $\mathbf{R}$, så gäller som bekant att $\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt}$. Låt nu $\Phi(x,y,z)$ vara ett skalärfält och $\vec{G}(x,y,z) = G_1(x,y,z)\vec{\imath} + G_2(x,y,z)\vec{\jmath} + G_3(x,y,z)\vec{k}$ ett vektorfält av klass C^1, definierade i $\mathbf{R}^3$. Visa följande analogi till deriveringsformeln ovan: $\nabla \bullet (\Phi \cdot \vec{G}) = (\nabla\Phi) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot (\nabla \bullet \vec{G})$, dvs. $div(\Phi \cdot \vec{G}) = (grad(\Phi)) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot (div(\vec{G}))$.



2. Vi studerar den äppelformade kroppen, som begränsas av rotationskardioiden $\rho = R(1 - \cos\varphi)$, uttryckt i sfäriska koordinater. I den övre figuren till höger syns ett tvärsnitt av kroppen genom z-axeln, som är dess rotationsaxel. På avståndet ρ från origo har kroppen densiteten $\delta(\rho, \varphi, \theta) = \delta_0 \rho / R$. Beräkna kroppens massa.



3. $\vec{F}(x,y) = \pi \sin x \vec{\imath} + (2\pi \sin x - 4x - 7y)\vec{\jmath}$. Beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, då C går från origo till punkten $(\pi/2, 1)$
a) längs kurvan $y = \sin x$, b) rätlinjigt.



4. Den streckade kvartscirkeln i xz-planet kan ges på parameterform som $x(v) = \cos v, z(v) = \sin v, v \in [\pi/2, \pi]$. Den heldragna kvartscirkeln kan därför ges som $x(v) = 2 + \cos v, z(v) = \sin v, v \in [\pi/2, \pi]$. Om vi låter den heldragna kvartscirkeln rotera kring z-axeln, uppstår den rotationssymmetriska ytan S i den nedre figuren. Denna yta S kan ges på parameterform som $\vec{r}(\theta, v) = (2 + \cos v)\cos\theta \vec{\imath} + (2 + \cos v)\sin\theta \vec{\jmath} + \sin v \vec{k}, \theta \in [0, 2\pi], v \in [\pi/2, \pi]$. Av symmetriskäl finns naturligtvis tyngdpunkten för ytan S på z-axeln. Använd *den givna parameterframställningen* för att bestämma tyngdpunktens z-koordinat

$$\bar{z} = \frac{\iint_S z \cdot dS}{\iint_S dS}$$