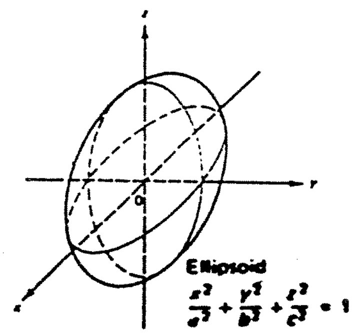
Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2, **Metsalo**
Mellanförhör nr 2, 2001-03-26

Texta på varje papper
- studieperiod, datum
- studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn
- utbildningsprogram (ARK,AUT,EST,INF,KEM,KON,MAA,MAK,MAR,PUU,RYK,TIK,TLT,TUO)
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

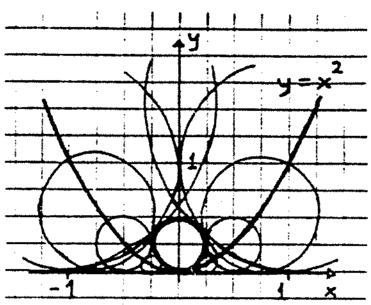
Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1. Bestäm maximum och minimum för funktionen $f(x,y,z) = xyz$ på ellipsoiden $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ med $a,b,c > 0$. (Utnyttja symmetrin.)



2. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le H\}$ är en rät cirkulär cylinder med densiteten $\delta(x,y,z) = k\cdot(x^2+y^2+z^2)$, där k är en proportionalitetskonstant. Då finns dess tyngdpunkt av symmetriskäl på z-axeln. Visa, att tyngdpunktens z-koordinat är $\bar{z} = H\cdot(3R^2+3H^2)/(6R^2+4H^2)$. Gott råd: trots att δ är enklast i sfäriska koordinater är det lämpligare att använda cylindriska koordinater på grund av C:s form.

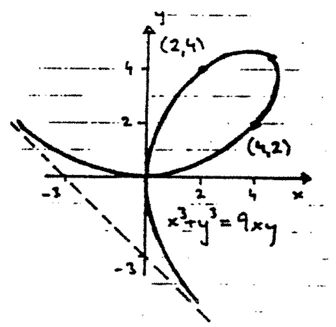
3. Vi studerar skaran av cirklar, som tangerar x-axeln och har mittpunkten på parabeln $y = x^2$. Cirkelskaran ges av ekvationen $(x-c)^2 + (y-c^2)^2 = (c^2)^2$, som också kan skrivas som $f(x,y,c) = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 2yc^2 = 0$. Denna cirkelskara har naturligtvis x-axeln som en envelopp, men den har också en annan envelopp. Härled ekvationen för denna andra envelopp. (Svar: Den andra enveloppen är cirkeln $x^2 + (y - 1/4)^2 = (1/4)^2$ med undantag för dess skärningspunkter med y-axeln.)



4. Newtons metod kan ibland användas för att numeriskt bestämma lösningar till ekvationssystem med 2 ekvationer och 2 obekanta. Om ekvationssystemet är $f(x,y) = 0,\ g(x,y) = 0$, kan iterationsschemat

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_m,y_m) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_m,y_m) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_m,y_m) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_m,y_m) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_m,y_m) \\ g(x_m,y_m) \end{pmatrix}$$

med lämpligt begynnelsevärde (x_0,y_0) konvergera till den sökta lösningen. Kurvan $x^3 + y^3 = 9xy$ i figuren till höger kallas för Cartesii blad. Den går bland annat genom origo, där den tangerar koordinataxlarna och genom punkterna (4,2) och (2,4), där den har lutningen 5/4 respektive 4/5 (fås via implicit derivering).



Vi försöker bestämma approximativt en punkt på kurvan, där den har lutningen 1/2. Använd begynnelsevärdet $(x_0,y_0) = (2,4)$ och beräkna nästa iteration (x_1,y_1) med hjälp av Newtons metod.
Nyttig formel för matrisinvertering från Grundkurs 1:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ om } ad \neq bc.$$

Lösningsförslag finns för påseende nere i Stavans i morgon tisdag kl. 13.00 – 13.30.