Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2, **Metsa**
Mellanförhör nr 2, 2000-03-27

Texta på varje papper
- **studieperiod, datum**
- **studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram (AUT,TFY,TIK,TUO,SÄH,KON,KEM,MAK,PUU,MAA,RYK)**
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

1. Vektorfältet $\bar{v}(x,y,z) = (-15x+6y)\hat{\imath} + (7y-2z)\hat{\jmath} + (9x-3z)\hat{k}$ är definierat och av klass C^1 i hela $\mathbb{R}^3$. Visa, att $|\mathrm{div}(\bar{v})| = |\nabla\cdot\bar{v}| = \|\mathrm{rot}(\bar{v})\| = \|\mathrm{curl}(\bar{v})\| = \|\nabla\times\bar{v}\|$ i hela $\mathbb{R}^3$. Visa också, att detta inte gäller för allmänna vektorfält genom att ge ett exempel på ett vektorfält $\bar{w}(x,y,z)$, definierat och av klass C^1 i hela $\mathbb{R}^3$, sådant att $|\nabla\cdot\bar{w}| \neq \|\nabla\times\bar{w}\|$.

2. Låt $T(x,y,z) = 3x^2 - y^2 - 2z^2 + xz + e^x\cos(z)$ i $\mathbb{R}^3$.
   a) Beräkna $\mathrm{grad}(T) = \nabla T$.
   b) Visa, att T är harmonisk, dvs. att $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(T)) = \nabla\cdot(\nabla T) = (\nabla\cdot\nabla)T = \nabla^2 T = \Delta T = 0$ i hela $\mathbb{R}^3$.
   c) I vilken riktning ökar T fortast i punkten (0,3,0)?
   d) Hur fort ökar T i den riktningen i punkten (0,3,0)?
   e) Hur fort ökar T i riktning mot origo i punkten (0,3,0)?
   f) Om man startar i punkten (0,3,0) och börjar gå rätlinjigt i den riktningen i vilken T ökar snabbast tills man kommer till xz-planet, var i xz-planet hamnar man då?

3. En rak cirkulär kon har basradien R och höjden H. Dess densitet är direkt proportionell mot avståndet från symmetriaxeln. Då finns också tyngdpunkten på symmetriaxeln. Visa, att tyngdpunkten finns på höjden H/5 över bascirkeln.

4. Beräkna massan hos den delen av ytan $z = 3 - (x + y^2)$, som projeceras ner på rektangeln $\Omega = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$ i xy-planet, om area-densiteten i punkten (x,y,z) på ytan ges av $\sigma(x,y,z) = xy$.
   Svar: massan ≈ 1.98.