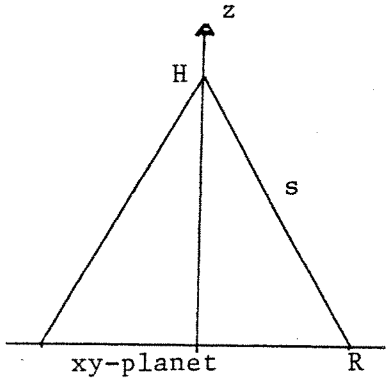
Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2, **Metsalo**
Mellanförhör nr 3, 2003-05-05

Texta på varje papper
- **studieperiod, datum**
- **studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram** (ARK,AUT,EST,INF,KEM,KON,MAA,MAK,MAR,PUU,RYK,TIK,TLT,TUO)
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1a) Konen $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R^2,$ $0 \leq z \leq f(x,y) = H(1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}/R)\}$ (skissad till höger) har som bekant volymen $V = \frac{\pi}{3}\cdot R^2H$. I punkten $(x,y,z) \in D$ är dess densitet $\delta(x,y,z) = \delta_1\cdot(x^2+y^2)/R^2$, så densiteten är 0 längs symmetriaxeln (z-axeln) och δ_1 längs bottenytans randkurva. Beräkna konens massa m och visa att dess genomsnittliga densitet $\bar{\delta} = m/V$ är $3\delta_1/10$.



b) Konens tyngdpunkt finns av symmetriskäl på z-axeln (symmetriaxeln). Visa att tyngdpunkten är $\bar{z} = H/6$.

Gott råd: På grund av kroppens form kan cylindriska koordinater vara bra.

2. Konytan $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ z = f(x,y) = H(1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}/R)\}$ (den övre begränsningsytan till konen i föregående uppgift) har som bekant arean $A = \pi Rs = \pi R(R^2+H^2)^{\frac{1}{2}}$. I punkten $(x,y,z) \in S$ är dess area-densitet $\delta(x,y,z) = \delta_2\cdot(x^2+y^2)/R^2$, så area-densiteten är 0 högst upp i konytans spets och δ_2 längst ner vid dess randkurva. Beräkna konytans massa m och visa att dess genomsnittliga area-densitet $\bar{\delta} = m/A$ är $\delta_2/2$.

3a) Bestäm funktionen y(x) som satisfierar differential-ekvationen $y'(x) = 2x\cdot e^{-y(x)}$ och begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

b) Bestäm funktionen y(x) som satisfierar differential-ekvationen $y'(x) = 2y(x)+e^{-x}$ och begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

Gott råd: Här är det enkelt att kontrollera, om svaret är korrekt.

4. Funktionen $f(t) = e^t$ satisfierar $f'=f$ och funktionen $g(t) = e^{-t}$ satisfierar $g''=g\neq g'$. Nu letar vi efter vektorfält med analoga egenskaper.
a) Bestäm ett vektorfält $\bar{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\bar{i}+F_2(x,y,z)\bar{j}+F_3(x,y,z)\bar{k} \neq \bar{0}$ (nollvektorfältet) sådant att $\nabla\times\bar{F} = \mathrm{rot}(\bar{F}) = \mathrm{curl}(\bar{F}) = \bar{F}$.
b) Bestäm ett vektorfält $\bar{G}(x,y,z) = G_1(x,y,z)\bar{i}+G_2(x,y,z)\bar{j}+G_3(x,y,z)\bar{k} \neq \bar{0}$ (nollvektorfältet) sådant att $\nabla(\nabla\cdot\bar{G}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\bar{G})) = \bar{G}$.

Goda råd: Eftersom det räcker med ett exempel i vardera deluppgiften kan man göra förenklande ansatser att t.ex. någon komponentfunktion bara beror på en enda variabel eller är identiskt lika med noll. (Går det, så går det!) Vidare är det även här enkelt att kontrollera, om svaret är korrekt.