Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

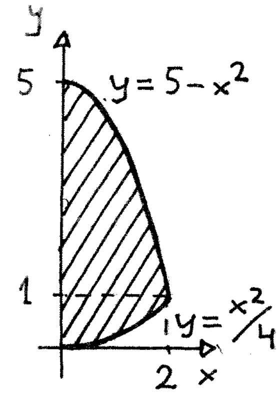
Metsalo

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 3 7.5.2007

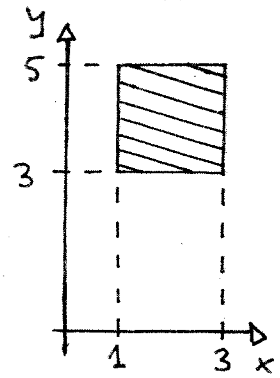
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. Det skuggade plana området i den övre figuren till höger begränsas av parablerna $y = x^2/4$ och $y = 5 - x^2$ samt y-axeln. Då det roterar kring y-axeln uppstår en rotationssymmetrisk kropp med volymen $V = 10\pi$. Dess tyngdpunkt finns av symmetriskäl på rotationsaxeln. Bestäm kroppens tyngdpunkt.

2. $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} - xz\vec{k}$. Beräkna kurvintegralen $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, där den slutna kurvan C går från punkten $(1, 0, 0)$ till punkten $(1, 0, \pi)$ längs helixen (korkskruven) $\vec{r}(t) = \cos t\vec{\imath} + \sin t\vec{\jmath} + \frac{t}{2}\vec{k}$ och sedan tillbaka till punkten $(1, 0, 0)$ rätlinjigt.



3. Beräkna massan hos den delen av ytan $z = f(x, y) = \sqrt{2xy}$, vars projektion på xy-planet är kvadraten $1 \le x \le 3 \le y \le 5$, om areadensiteten i punkten (x, y, z) på ytan är $\delta(x, y, z) = 2z$ (godtyckliga enheter).

4. Låt $g(r)$ vara en deriverbar funktion av en variabel, definierad i intervallet $]0, \infty[$. Låt $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ vara positionsvektorfältet i $\mathbf{R}^2$ och $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\vec{G}(x, y) = g(r)\vec{r} = g(\sqrt{x^2 + y^2})x\vec{\imath} + g(\sqrt{x^2 + y^2})y\vec{\jmath}$ är då ett vektorfält definierat i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
   a) Visa att för att $\vec{G}$ skall vara källfritt i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (dvs. $\nabla \bullet \vec{G} = div(\vec{G}) \equiv 0$), måste g satisfiera differentialekvationen $rg'(r) + 2g(r) = 0$.
   b) Bestäm allmänna lösningen till denna differentialekvation.
   c) Visa att om g satisfierar denna differentialekvation, så är vektorfältet $\vec{G}$ även konservativt i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genom att bestämma en skalär potential $\Phi(x, y)$ till vektorfältet $\vec{G}(x, y)$ i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sådan att $\nabla\Phi = grad(\Phi) = \vec{G}$.

Imorgon är det tisdag. Då kan detta mellanförhör diskuteras nere i Loungen kl. 13:00-13:30 (för i Stavans pågår prepkursen). Fyll i kursutvärderingen på kursens hemsida och ha en trevlig sommar. Tack för det gångna läsåret! Georg M.