

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 3, 2008-05-07

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika uppgifter kan ge olika antal poäng!

Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.

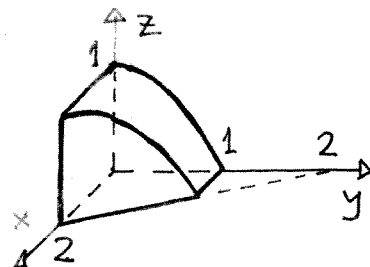
Om ni mistänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

- $\Phi(x, y, z) = e^{xy} + \cos(yz)$ och $\vec{G}(x, y, z) = xz\vec{i} + \ln(1 + y^2)\vec{j} + \frac{xy}{z}\vec{k}$. Beräkna

a) $\text{grad}(\Phi) = \nabla\Phi$, b) $\text{div}(\vec{G}) = \nabla \cdot \vec{G}$ och c) $\text{rot}(\vec{G}) = \text{curl}(\vec{G}) = \nabla \times \vec{G}$. (1p.+1p.+1p.)
- Vid en variabelsubstitution $\vec{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\vec{i} + y(u, v, w)\vec{j} + z(u, v, w)\vec{k}$ i en trippelintegral ersätts volymselementet $dV = dx dy dz$ som bekant med $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| du dv dw$, där $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ är transformationens Jacobian (Jacobian-matrisens determinant) och kan betraktas som en förstöringsfaktor.

Visa att vid övergång till cylindriska koordinater r, θ och z via $x(r, \theta, z) = r \cos \theta, y(r, \theta, z) = r \sin \theta, z(r, \theta, z) = z$ blir Jacobianen $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$. (Därför ersätts $dV = dx dy dz$ inte med $dr d\theta dz$ utan med $r dr d\theta dz$ vid övergång till cylindriska koordinater.) (3p.)

- Beräkna $I = \iiint_D xz dV$, då D är området i 1:a oktanten (där $x, y, z \geq 0$), som begränsas av koordinatplanen, planet $x+y=2$ samt den paraboliska cylindern $y^2+z=1$ (se figuren till höger). (Svar: $I \approx 0.3857$) (6p.)



- Beräkna arean hos den delen av sadelytan $z = 2xy$, som finns innanför den rätta cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = 3$. (Svar: $A \approx 24$) (6p.)

- Kardioidkurvan $C : r = a(1 + \cos \theta), a > 0$ (given i polära koordinater: se figuren nedan) har av symmetriskäl tyngdpunkten på x -axeln. Bestäm tyngdpunktens x -koordinat

$$\bar{x} = \frac{\int_C x ds}{\int_C ds} \quad (6p.)$$

Nyttiga (?) formler:

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1,$$

$$\cos^2 \phi = (1 + \cos(2\phi))/2,$$

$$\sin^2 \phi = (1 - \cos(2\phi))/2,$$

$$\sin(2\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi,$$

$$\cos(2\phi) = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi = 2 \cos^2 \phi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \phi.$$

