Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

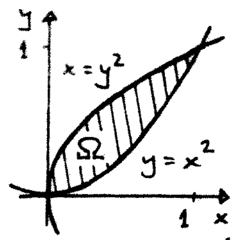
Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

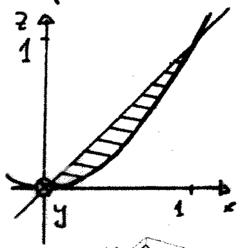
Mellanförhör nr 3 26.4.2004

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

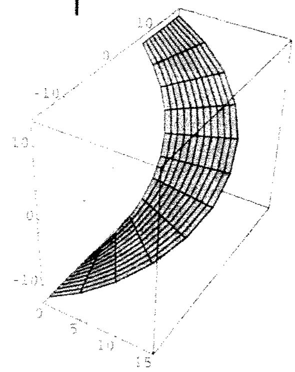
Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
På förekommen anledning varnas för oavsiktliga tryckfel i texten.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. Det plana området Ω i den övre figuren begränsas av parablerna $x = y^2$ och $y = x^2$. Ω är alltså symmetrisk kring linjen $y = x$ och dess area är naturligtvis $1/3$. I punkten (x, y) har Ω area-densiteten $\delta(x, y) = 5x+6y^2$. Visa att trots att area-densiteten inte är symmetrisk kring linjen $y = x$, så är Ω:s tyngdpunkt (masscentrum) ändå på denna linje.



2. Då parabeln $z = x^2$ roterar kring z-axeln, uppstår rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$. Visa att kroppen som begränsas av rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = x$ har volymen $\pi/32$. (I figuren i mitten syns kroppens projektion på xz-planet. Studera kroppens projektion på xy-planet och använd gärna polära/cylindriska koordinater.)



3. $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{k} = u\cos(v)\vec{\imath} + u\sin(v)\vec{\jmath} + 8v\vec{k}$, $6 \leq u \leq 15, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ ger en yta på parameterform, nämligen helicoiden (spiralrampen) i den nedre figuren (ritad med Mathematica). Bestäm dess area. (Svar: arean ≈ 376.)

4. $\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$, dvs. *nabla* (eller *del*, som den också kallas), är inte en vektor i vanlig bemärkelse, trots att den har en $\vec{\imath}$-"komponent", en $\vec{\jmath}$-"komponent" och en $\vec{k}$-"komponent". Det är en *differentieringsoperator*, så räkneregler som gäller för vanliga vektorer behöver inte gälla för ∇.
a) För vektorer $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ gäller det att $\vec{b} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Ge ett exempel på ett vektorfält $\vec{F}(x, y, z)$ av klass C^1 i $\mathbf{R}^3$ sådant att $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) = \vec{F} \bullet (rot(\vec{F})) = \vec{F} \bullet (curl(\vec{F})) \not\equiv 0$ (inte identiskt lika med 0; det gör inget om $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) = 0$ i somliga punkter). Beräkna också $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F})$ i någon punkt, där $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) \neq 0$.
b) För vektorer $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ gäller det att $\vec{a} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Visa att för alla vektorfält $\vec{G}(x, y, z)$ av klass C^2 i $\mathbf{R}^3$ gäller att $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{G}) = div(rot(\vec{G})) = div(curl(\vec{G})) \equiv 0$ (identiskt lika med 0). Ibland kan alltså en räkneregel, som gäller för vanliga vektorer, *till synes* ha en motsvarighet för ∇.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2,$
$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots,$
$\int \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{t^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}) + C.$

Efter mellanförhöret finns lösningsskisser för påseende utanför rum U337b. Ha en minnesrik Valborgmässohelg (försök åtminstone att minnas något!) och en riktigt trevlig sommar! Georg