Metsalo

Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2

Tentamen, 7.1.2003

Texta på varje papper

- **studieperiod, tentamen, datum**
- **studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram** (ARK,AUT,EST,INF,KEM,KON,MAA,MAK,MAR,PUU,RYK,TIK,TLT,TUO)
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

I uppgifterna 1 och 2 är $\delta(x,y,z) = zy^2x^4$ och $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

1. Halvklotet B har i punkten $(x,y,z) \in B$ densiteten $\delta(x,y,z)$ (godtyckliga enheter). I vilka punkter antar densiteten sitt maximum?

2. B har fortfarande densiteten $\delta(x,y,z)$ i punkten $(x,y,z) \in B$.
   a) Bestäm massan hos halvklotet B. (Svar: $m \approx 0.00491$)
   b) På grund av symmetri finns B:s tyngdpunkt på z-axeln.
   Bestäm tyngdpunkten. (Svar: $\bar{z} \approx 0.369$)
   Gott råd: På grund av B:s form kan cylindriska eller sfäriska koordinater vara lämpliga.

3. I vilken punkt skär tangentplanet till ytan
   $z = f(x,y) = x^4y^2 - x^3y - x^2 - xy^5 + 1/y$
   i punkten (7,1,2003) x-axeln?

4. Beräkna kurvintegralen $W = \int_C \bar{F} \cdot \overline{dR}$, där C är räta linjen från origo till punkten (1,2,3) och $\bar{F}(x,y,z) = (e^z + 1/(1+x^2))\bar{i} + 2yz\bar{j} + (xe^z + y^2)\bar{k}$
   a) direkt som en kurvintegral
   b) genom att visa att $\bar{F}$ är virvelfritt i hela $\mathbb{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, bestämma $\bar{F}$:s potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ sådan att $\nabla\Phi = \bar{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av potentialfunktionen.
   (Svar: $W \approx 32.871$)

5. Bestäm allmänna lösningen till differential-ekvationen $y'(x) + 2x \cdot y(x) = 2x$ samt lösningen, som satisfierar begynnelse-villkoret $y(0) = 0$.

Nyttiga formler: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$, $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$,

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} t \cdot dt = \int_0^{\pi} \cos^{2n} t \cdot dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \quad \text{för } n = 1,2,3,\ldots$$