

Texta på varje papper

- studieperiod, tentamen, datum
- studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn
- utbildningsprogram (ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TIK, TLT, TUO)
- eventuella tidigare namn och utbildningsprogram
- komplettera med namnteckning

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.

Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

I uppgifterna 1 och 2 är $\delta(x,y,z) = zy^2x^4$ och $B = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

1. Halvklotet B har i punkten $(x,y,z) \in B$ densiteten $\delta(x,y,z)$ (godtyckliga enheter). I vilka punkter antar densiteten sitt maximum?
2. B har fortfarande densiteten $\delta(x,y,z)$ i punkten $(x,y,z) \in B$.
 - a) Bestäm massan hos halvklotet B. (Svar: $m \approx 0.00491$)
 - b) På grund av symmetri finns B:s tyngdpunkt på z-axeln.
Bestäm tyngdpunkten. (Svar: $\bar{z} \approx 0.369$)

Gott råd: På grund av B:s form kan cylindriska eller sfäriska koordinater vara lämpliga.
3. Ytorna $z = f(x,y) = xy^2 - xy + 2y$ och $z = g(x,y) = 2y^3 - 2x^2 - y - 1$ går bågge genom punkten $(x,y,z) = (18,11,2002)$. Bestäm en riktningsvektor till tangentlinjen till ytornas skärningskurva i den punkten.
4. Beräkna kurvintegralen $W = \int_C \bar{F} \cdot dR$, där C är räta linjen från origo till punkten $(1,2,3)$ och $\bar{F}(x,y,z) = (e^z + 1/(1+x^2))\bar{i} + 2yz\bar{j} + (xe^z + y^2)\bar{k}$
 - a) direkt som en kurvintegral
 - b) genom att visa att \bar{F} är virvelfritt i hela \mathbb{R}^3 , som är enkelt sammanhangande, bestämma \bar{F} :s potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ sådan att $\nabla\Phi = \bar{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av potentialfunktionen.

(Svar: $W \approx 32.871$)
5. Bestäm allmänna lösningen till differential-ekvationen $y'(x) + 2x \cdot y(x) = 2x$ samt lösningen, som satisfierar begynnelse-villkoret $y(0) = 0$.

Nyttiga formler: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$, $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$,

$$\int_0^\pi \sin^{2n} t \cdot dt = \int_0^\pi \cos^{2n} t \cdot dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \text{ för } n = 1, 2, 3, \dots$$

