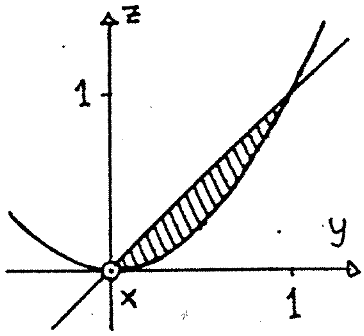
Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2 Metsalo

Tentamen, 2000-05-24

Texta på varje papper
- **studieperiod, tentamen, datum**
- **studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram (AUT,TFY,TIK,TUO,SÄH,KON,KEM,MAK,PUU,MAA,RYK)**
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

1. Bestäm de kritiska punkterna hos funktionen $f(x,y) = (2x - y)/(5 + x^2 + y^2)$ i $\mathbb{R}^2$. Har f några globala extremvärden? Motivera.



2. Visa, att kroppen, som begränsas av planet $z = y$ och rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$ har volymen $\pi/32$. (I figuren till höger syns kroppens projektion på yz-planet. Studera kroppens projektion på xy-planet och använd gärna polära / cylindriska koordinater.)

3. Stokes' sats säger, att om $\bar{v}$ är ett vektorfält av klass C^1 i något område $\mathcal{R}$ i $\mathbb{R}^3$ och om $\mathcal{S}$ är en styckvis slät, orienterbar yta i $\mathcal{R}$ med en styckvis slät, enkel sluten kurva $\partial\mathcal{S}$ som randkurva, så är $\iint_{\mathcal{S}} \hat{n}\cdot(\nabla\times\bar{v})\, dA = \oint_{\partial\mathcal{S}} \bar{v}\cdot d\bar{R}$, där sambandet mellan valet av riktningen hos $\hat{n}$ och integrationsordningen över $\partial\mathcal{S}$ bestäms av högerregeln. Verifiera Stokes' sats, om $\bar{v} = y^2\hat{\imath} + 2xz\hat{\jmath} + y^2\hat{k}$ och $\mathcal{S}$ är den övre (plana) begränsningsytan hos kroppen i uppgift 2.

4a) Visa, att vektorfältet $\bar{v} = (4xz - 2x)\hat{\imath} + (2yz + 2y)\hat{\jmath} + (2x^2 + y^2 - 3z^2)\hat{k}$ är källfritt (dvs. att $\operatorname{div}(\bar{v}) = \nabla\cdot\bar{v} \equiv 0$) och virvelfritt (dvs. att $\operatorname{rot}(\bar{v}) = \operatorname{curl}(\bar{v}) = \nabla\times\bar{v} \equiv \bar{0}$) i $\mathbb{R}^3$.

b) Om ett vektorfält $\bar{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$ är virvelfritt i ett enkelt sammanhängande område $\mathcal{R}$ i $\mathbb{R}^3$, så har $\bar{u}$ en skalär potential Φ sådan att $\operatorname{grad}(\Phi) = \nabla\Phi = \bar{u}$. Φ är bestämd upp till en konstant. Bestäm en skalär potential för vektorfältet $\bar{v}$.

c) Om ett vektorfält $\bar{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$ är källfritt i ett enkelt sammanhängande område $\mathcal{R}$ i $\mathbb{R}^3$, så har $\bar{u}$ en vektorpotential $\bar{w} = w_x\hat{\imath} + w_y\hat{\jmath} + w_z\hat{k}$ sådan att $\operatorname{rot}(\bar{w}) = \operatorname{curl}(\bar{w}) = \nabla\times\bar{w} = \bar{u}$. För $\bar{w}$ har vi rätt mycket valfrihet. Vi kan t.ex. välja w_x eller w_y eller w_z till att vara 0. Bestäm en vektorpotential för vektorfältet $\bar{v}$.

5. Kurvan C har egenskapen att i varje punkt (x,y) på C har C lutningen $2x/(1+3y^2)$. C går genom punkten $(2,1)$ (och har alltså lutningen 1 där). Bestäm ekvationen för C samt punkterna, där C skär koordinataxlarna.

Nyttiga formler: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$, $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$,

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} t\, dt = \int_0^{\pi} \cos^{2n} t\, dt = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot \;\ldots\; \cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi \text{ för } n = 1,2,3,\ldots .$$