Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

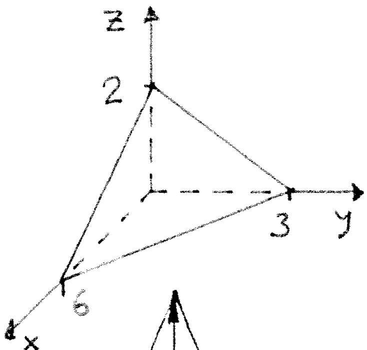
Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen 27.10.2005

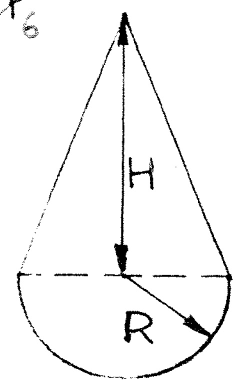
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. a) Bestäm konvergensradien hos potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$.
   b) Bestäm någon övre gräns för summan av den positiva talserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$. Gränsen får gärna vara grov, men skall vara motiverad.

2. Bestäm maximala volymen hos ett rätblock, som ryms i tetraedern i den övre figuren till höger med hörnen $(0,0,0)$, $(6,0,0)$, $(0,3,0)$ och $(0,0,2)$ så att tre av rätblockets sidor sammanfaller med koordinatplanen.



3. Svakar tänker svarva en liten kloss av homogent trävirke åt sin lilla systerdotter. Den består av ett halvklot med radien R och ovanpå det en kon med höjden H. (I den nedre figuren till höger syns ett tvärsnitt genom klossens symmetriaxel.) Hur stor får H maximalt vara i förhållande till R för att klossen inte skall välta, då den står på halvklotet?

4. Beräkna kurvintegralen $W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, där C är räta linjen från origo till punkten $(1,2,3)$ och $\vec{F}(x,y,z) = (e^z + \frac{1}{1+x^2})\vec{\imath} + 2yz\vec{\jmath} + (xe^z + y^2)\vec{k}$
   a) direkt som en kurvintegral
   b) genom att visa att $\vec{F}$ är virvelfritt i hela $\mathbf{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, bestämma $\vec{F}$:s potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ sådan att $\nabla\Phi = \vec{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av potentialfunktionen.
   (Svar: $W \approx 32.871$)

5. Antag att $g(u,v)$ är av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$ och harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 = 0$ i hela uv-planet. Låt $h(x,y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$. Då är även $h(x,y)$ av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$. Visa att h är också harmonisk, dvs. visa att $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 = 0$ i hela xy-planet.