Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

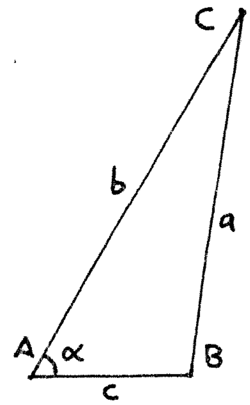
Tentamen 28.8.2007

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes första gången våren -06; 10sp) som ni skriver! Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

1. Beräkna ett närmevärde till integralen $\int_0^2 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$ genom att utveckla integranden i form av en Maclaurin-serie (Taylor-serie utvecklad i origo) och medtaga endast de tre första termerna. Uppskatta också felet i approximationen.

2. Två ytor säges skära varandra vinkelrätt i en punkt, om deras normalvektorer är vinkelräta i punkten. I vilka punkter skär den hyperboliska paraboloiden (sadelytan) $f(x, y, z) = xy - z = 0$ och den elliptiska paraboloiden $g(x, y, z) = 3y^2 + z^2 - x = 0$ varandra vinkelrätt?



3. Cosinus-satsen säger att om b och c är två av sidorna hos en plan triangel och α är den mellanliggande vinkeln, så gäller för den tredje sidan a att $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, dvs. att $a(b, c, \alpha) = (b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)^{1/2}$.
Avståndet a mellan två punkter B och C bestämdes med hjälp av en tredje punkt A. Mätningarna gav att $b = 800 \pm 10m, c = 300 \pm 3m$ och $\alpha = 60 \pm 1°$. Cosinus-satsen ger då att $a \approx 700m$. Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $a \approx 700m$.

4. a) Vid en variabelsubstitution $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath}$ i en dubbelintegral ersätts areaelementet $dA = dxdy$ som bekant med $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$, där $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ är transformationens Jacobian och kan ses som en förstoringsfaktor. Visa att vid övergång till polära koordinater r och θ via $x(r, \theta) = r\cos\theta, y(r, \theta) = r\sin\theta$ blir Jacobianen $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. (Därför ersätts $dA = dxdy$ inte med $drd\theta$ utan med $rdrd\theta$ vid övergång till polära koordinater.)
b) Vid en variabelsubstitution $\vec{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\vec{\imath} + y(u, v, w)\vec{\jmath} + z(u, v, w)\vec{k}$ i en trippelintegral ersätts volymselementet $dV = dxdydz$ på motsvarande sätt med $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw$. Visa att vid övergång till sfäriska koordinater ρ, ϕ och θ via $x(\rho, \phi, \theta) = \rho\sin\phi\cos\theta, y(\rho, \phi, \theta) = \rho\sin\phi\sin\theta, z(\rho, \phi, \theta) = \rho\cos\phi$ blir Jacobianen $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2\sin\phi$. (Därför ersätts $dV = dxdydz$ inte med $d\rho d\phi d\theta$ utan med $\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$ vid övergång till sfäriska koordinater.)

5. Vi studerar den äppelformade kroppen som begränsas av rotationskardioiden $\rho = R(1 - \cos\phi)$, uttryckt i sfäriska koordinater. I figuren till höger syns ett tvärsnitt av kroppen genom z-axeln, som är dess rotationsaxel. På avståndet ρ från origo har kroppen densiteten $\delta(\rho, \phi, \theta) = \delta_0\rho/R$. Beräkna kroppens massa.