Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen 29.08.2005

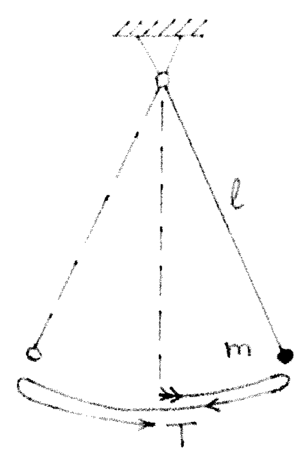
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Visa att talserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^4} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 4}{16} + \frac{\sin 9}{81} + \ldots$ konvergerar samt bestäm en övre och en undre gräns för dess summa. Gränserna får gärna vara grova, men skall vara motiverade.

2. Låt oss studera ytan $xyz = 2$ i första oktanten (där $x, y, z > 0$). Om vi tar en godtycklig punkt på ytan, så kommer ytans tangentplan i punkten att begränsa en tetraeder tillsammans med koordinatplanen. Visa att volymen hos denna tetraeder är oberoende av i vilken punkt på ytan vi tar tangentplanet samt bestäm denna volym.
(En triangel med basen b och höjden h har som bekant arean $A = bh/2$. En tetraeder eller mera allmänt en kon med basarean A och höjden h har som bekant volymen $V = Ah/3$.)

3. Svängningstiden T för små svängningar hos en matematisk pendel, bestående av en punktmassa m upphängd på en styv, viktlös tråd av längd l ges som bekant(?) av $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, där g är tyngdkraftsaccelerationen ($g \approx 9.81 m/s^2$). Märk, att denna svängningstid inte beror på massan m. Svakar bygger en pendel för att bestämma en approximation av g. Han uppmäter l till $1.00 \pm 0.03m$ (eftersom tråden inte är viktlös och eftersom han inte har en punktmassa utan en tung mutter, är det lite svårt att bestämma l exakt) och T till $2.00 \pm 0.05s$ (genom att mäta tiden för flera svängningar och dividera; eftersom han använder ett stoppur är det inte heller så lätt att bestämma T exakt). Detta ger honom att $g \approx \pi^2 m/s^2 \approx 9.87 m/s^2$. Använd *differentialen* till att bestämma en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $g \approx \pi^2 m/s^2$ av tyngdkraftsaccelerationen g, som osäkerheterna i l och T ger upphov till.



4. Beräkna dubbelintegralen $\int_0^8 (\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \sqrt{16 - y^4} dy) dx$. Gott råd: byt integrationsordning.

5. Låt $\mathcal{H}$ vara en homogen kropp med volymen $V = \iiint_{\mathcal{H}} dV$. z-koordinaten $\bar{z}$ för dess tyngdpunkt ges som bekant av $\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{H}} z dV$ (och motsvarande för tyngdpunktens x- och y-koordinat).
Halvklotet $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ har som bekant volymen $V = 2\pi R^3/3$. Dess tyngdpunkt finns av symmetriskäl på z-axeln. Beräkna tyngdpunktens z-koordinat $\bar{z}$ med hjälp av
a) cylindriska koordinater
b) sfäriska koordinater.