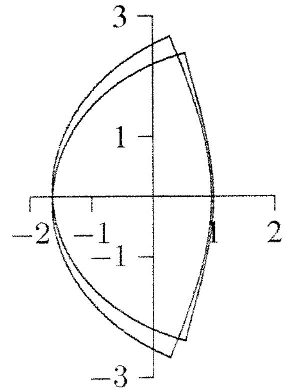
TKK, Matematiska institutionen Gripenberg
Mat-1.1531 Grundkurs i matematik 3-I
Tentamen 12.5.2008

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (3p) Skriv det komplexa talet $\dfrac{\mathrm{i}+\bar{z}}{3+\mathrm{i}}$ i formen $a+\mathrm{i}b$ då $z = 1+2\mathrm{i}$.

2. (5p) Figuren visar mängden $\{\, f(\gamma(t)) \mid t \in [a,b] \,\}$ där $f(z) = \mathrm{e}^z + z\cos(z)$ och $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$ är den stig som består av randen av kvadraten Q med hörn i punkterna $-2-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$, i och $-2+\mathrm{i}$. Bestäm med hjälp av figuren hur många lösningar till ekvationen $\mathrm{e}^z + z\cos(z) = -1-\mathrm{i}$ det finns inne i den här kvadraten Q. Förklara hur du kommit fram till ditt svar och vilket villkor f bör uppfylla, men du behöver inte bevisa att man kan resonera på det sättet.



3. (3p) Visa att funktionen $f(z) = az+b$, där a och b är komplexa tal och $a \neq 0$, avbildar cirklar på cirklar. (En cirkel i det komplexa planet består som bekant av alla punkter z för vilka gäller $|z-z_0| = r$ där $r > 0$ är radien och z_0 är mittpunkten.)

4. (3p) Vad är det för "fel" på funktionen $\ln(z)$ som gör att den inte kan skrivas some en Laurent-serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$?

5. (3p) Är funktionen $u(x,y) = x^2y - xy^2$ harmonisk i $\mathbb{R}^2$? Motivera ditt svar!

6. (5p) Antag att $F(s)$ är Laplace-transformationen av f. Vilket av följande uttryck ger $f(0)$: (a) $\lim_{z\to 0} F(z)$, (b) $\lim_{\mathrm{Re}\, z\to\infty} F(z)$, (c) $\lim_{z\to 0} zF(z)$, (d) $\lim_{\mathrm{Re}\, z\to\infty} zF(z)$. Motivera ditt svar (tex. med exempel som utesluter något alternativ).

7. (5p) Antag att $y(t)$ är lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

Bestäm Laplace-transformationen av $y(t)$ (men du behöver inte bestämma $y(t)$).

8. (3p) Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är sådan att funktionen $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n)$ har egenskapen att dess Fourier-serie verkligen konvergerar mot $g(t)$ i alla punkter. Vilken formal som innehåller f och dess Fourier-transformation $\hat{f}$ får man om man uttrycker $g(0)$ med hjälp av Fourier-serien för g? Du kan anta att alla serier som förekommer konvergerar tillräckligt bra.

VÄND!!