Matta 3
12.5.08

7. (3p) Antag att man numeriskt löser diffusionsekvationen $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $u(x,0) = u_0(x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ med hjälp av följande explicita metod där $U(m,n) \approx u(m\Delta x, n\Delta t)$ och $\Delta x = \frac{1}{M}$:

$$\frac{U(m,n+1) - U(m,n)}{\Delta t} = \frac{U(m+1,n) - 2U(m,n) + U(m-1,n)}{(\Delta x)^2},$$

$$m = 1, \ldots, M-1, \quad n \geq 0,$$

då $U(0,n) = U(M,n) = 0$ och $U(m,0)$ är givna för $0 \leq m \leq M$ och $n \geq 0$. Visa att om $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$ och $U(m,0) \geq 0$ för alla $m = 1, \ldots, M-1$ så gäller också $U(m,n) \geq 0$ för alla $m = 1, \ldots, M-1$ och $n > 0$.