Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Masson

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 2 17.11.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Nelikulmion $ABCD$ lävistäjien AC ja BD leikkauspisteen P selville saamiseksi otetaan käyttöön koordinaatisto $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$, missä $O = A$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. a) Määritä P:n koordinaatit mainitussa koordinaatistossa, kun tiedetään, että vektorin $\overrightarrow{BC}$ koordinaatit kannassa $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ovat (α, β). b) Mitä ehtoja koordinaateille (α, β) on asetettava, jotta janoilla AC ja BD todella on yhteinen piste?

2. Peilipinta on pisteiden $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ ja $C = (-1, 2, -4)$ kautta kulkeva taso T. Määritä a) T:n yhtälö perusmuodossa $ax + by + cz + d = 0$, b) pisteen $P = (5, 5, 5)$ peilikuvapiste T:n suhteen.

3. a) Tiedetään: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Johda kaava $\tan\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha/(1 + \cos\alpha)$.
   b) Määritä yhtälön $z^2 + (2+4i)z + 8i = 0$ ratkaisut kompleksiluvun perusmuodossa $x + iy$. (Saatat tarvita a)-kohdan tulosta.)

4. Määritä a) (reaaliarvoisen) funktion $f(x, y) = (\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\,)\sum_{k=1}^{\infty}(k^3 + k)\,x^k y^k$ määrittelyjoukko $D_f \subset \mathbb{R}^2$, b) funktion $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2x - 2$ arvojoukko $R_g \subset \mathbb{R}$, kun määrittelyjoukoksi on rajattu

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 + \cos t,\ y = 3\sin t,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Pitkäranta/Masson

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Mellanförhör 2 17.11.2008

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. För att bestämma skärningspunkten P hos diagonalerna AC och BD i en fyrhörning $ABCD$ används koordinatsystemet $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$, där $O = A$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. a) Bestäm P:s koordinater i det nämnda koordinatsystemet, om man vet att vektorn $\overrightarrow{BC}$:s koordinater i basen $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ är (α, β). b) Under vilka villkor på koordinaterna (α, β) har linjesegmenten AC ja BD verkligen en gemensam punkt?

2. En spegelyta är planet T, som går genom punkterna $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ och $C = (-1, 2, -4)$. Bestäm a) T:s ekvation på standardformen $ax + by + cz + d = 0$, b) spegelpunkten till punkten $P = (5, 5, 5)$ med avseende på planet T.

3. a) Vi vet: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Härled formeln $\tan\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha/(1+\cos\alpha)$.
   b) Bestäm lösningarna till ekvationen $z^2 + (2+4i)z + 8i = 0$ på standardformen $x + iy$ för komplexa tal. (Resultatet från a)-delen kan eventuellt behövas.)

4. Bestäm a) definitionsmängden $D_f \subset \mathbb{R}^2$ för (den reellvärda) funktionen $f(x, y) = (\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\,)\sum_{k=1}^{\infty}(k^3 + k)\,x^k y^k$, b) värdemängden $R_g \subset \mathbb{R}$ för funktionen $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2x - 2$, då dess defintionsmängd är begränsad till

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 + \cos t,\ y = 3\sin t,\ t \in \mathbb{R}\}.$$