Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Marola/Tikanmäki

Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I/ Mat-1.1331 Matematiikan peruskurssi KP3-I

Tentti 28.10.2008

Kirjoita vastauspaperiin kumman kurssin haluat suorittaa. Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja. Perustele vastauksesi!

1. (a) Määrittele neliöjuuren $\sqrt{z}$, $z \neq 0$, pääarvo kompleksitasossa.

   (b) Laske $\mathrm{Im}\left(\frac{(1+2i)^3}{3-4i}\right)$.

   (c) Laske $(-1-i)^i$:n pääarvo.

2. (a) Etsi funktio f, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa ja jonka reaaliosa $\mathrm{Re} f = x^2 + xy - y^2$.

   (b) Selitä miksi ei voi olla funktiota, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa ja jonka reaaliosa on $y^2 + 2xy$.

3. Laske Taylorin sarja funktiolle $f(z)$ pisteessä 0 ja funktiolle $g(z)$ pisteessä $2i$, kun

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \qquad \text{ja} \qquad g(z) = \frac{1}{1-z}.$$

   Missä alueessa sarjat suppenevat?

4. (a) Olkoon suljettu polku C $3i$-keskisen 2-säteisen kiekon kehä kerran vastapäivään kierrettynä. Laske integraali

$$\int_C \frac{2}{z^2+4}\, dz.$$

   (b) Etsi parametriesitys polulle C.

5. Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & 0 < t < \pi, \end{cases}$$

   jatkettu 2π-jaksolliseksi funktioksi $\mathbb{R}$:ään kaavalla $f(t+2\pi) = f(t)$. Määrittele ja laske funktion $f(t)$ kompleksinen ja reaalinen Fourier-sarja. Millä $t \in [-\pi, \pi)$ Fourier-sarja suppenee funktioon $f(t)$?