

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 1 13.10.2008

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Apatian valtakunnassa elintason $y(t)$ kasvunopeus on kääntäen verrannollinen elintason neliöön, ts. $y' = A/y^2$, missä A on vakio. Lisäksi on tiedossa, että $y(2) = 2$ ja $y(3) = 3$. Määritä näillä tiedoilla Apatian elintaso aikavälillä $[2, \infty)$. (Aikayksikkö = tuhat vuotta.)
2. a) Oletetaan kunta-aksioomat sekä tulos $0 \cdot x = 0 \forall x$ ($\forall x =$ jokaiselle kunnan alkioille x). Johda oletuksista tulos $-x = (-1) \cdot x \forall x$.
b) Onko propositio $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ identtisesti tosi (eli tosi kaikille propositioille A, B)? Perustele!
3. Näytä suoraan lukujonon suppenemisen määritelmästä (siis vetoamatta mihinkään ko. määritelmästä johdettuun lauseeseen), että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1004}{n + 2} = 2.$$

4. Palautuvasta rationaalilukujonosta

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n + 3}, \quad n = 0, 1, \dots$$

väitetään:

$$V1: \frac{5}{7} < a_n \leq \frac{3}{4}, \text{ kun } n = 1, 2, \dots \quad V2: a_{n+1} - a_n < 0, \text{ kun } n = 0, 1, \dots$$

- a) Jos V1 ja V2 oletetaan tosiksi, niin mitä voidaan päätellä lukujonon $\{a_n\}$ mahdollisesta suppenemisestä ja raja-arvosta?
- b) Todista V1 induktiolla.
- c) Todista V2 induktiolla.