

Yo-kirjoituksissa hyväksytty laskin sallittu. Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoisen. Osatehtävien painoarvo on yhtäsuuri ellei painoja ole erikseen annettu.

Tehtävät

1. Olkoot vektorit $\mathbf{a} = 2008\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$. Laske $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ja $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Millä parametrin α arvolla skalaarikolmitulo $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$?
2. (a) Osoita, että matriisitulon transpoosille pätee $(AB)^T = A^T B^T$.
(b) Osoita, että jos $n \times n$ matriisin A ominaisarvoille λ_i pätee $\lambda_n > \lambda_{n-1} > \dots > \lambda_1 > 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, niin käänteismatriisi A^{-1} on olemassa ja $1/\lambda_i$ on A^{-1} :den ominaisarvo.
3. Etsi yhtälöryhmän $Ax = b$ kaikki ratkaisut kaikilla parametrien α ja β arvoilla ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), kun

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 16 & 12 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2008 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

4. Kuvaus

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kuvaa xy -tason pisteet xy -tason pisteiksi. Osoita, että kyseessä on peilauskuvauks ja määritä sen akseli. Laske kolmion ABC kuva, kun $A = (0, 0)$, $B = (5, 1)$ ja $C = (0, -2)$. Piirrä kuvio.