Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Arponen/Alestalo/Liimatainen

Mat-1.1310 matematiikan peruskurssi K1

2. välikoe 17.11.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Laske seuraava determinantti:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

   (b) Olkoot A ja B 3×3 matriiseja ja $\det A = 4$, $\det B = -3$. Laske $\det(AB)$, $\det(5A)$, $\det(B^{-1}AB)$.

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a, 1p.) A:n ominaisarvot?

(b, 3p.) Aseta $h = 1$ ja laske ominaisvektorit.

(c, 2p.) Miten pitäisi h valita, että A on diagonalisoituva?

3. a) Olkoon $a < 1$ ja $a \neq 0$. Toisen asteen yhtälön $ax^2 - 2x + 1 = 0$ ratkaisut ovat tällöin muotoa

$$x = x(a) = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a} \quad \text{ja} \quad y = y(a) = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}.$$

Määritä raja-arvot

$$\lim_{a \to 0} x(a) \quad \text{ja} \quad \lim_{a \to 0} y(a).$$

b) Olkoon $f(x) = 1 - 2\sqrt{x} - 3x^3$ ja $g(x) = 2 + 2x\sqrt{x} + x^3$. Osoita (laskemalla molemmat raja-arvot), että

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4. a) Johda kaksinkertaisen kulman kaava $\cos(2x) = \ldots$ derivoimalla yhtälön $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ molemmat puolet. (2 p.)
b) Määritä käyrän $y = \tan(x^2)$ normaalisuora pisteessä $(\sqrt{\pi}/2, 1)$.
Lisätieto: $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. (4 p.)

K1 2. vk 17.11.2007

1 a) Kehitetään toisen rivin mukaan:

$$\begin{vmatrix} 4&8&8&8&5\\ 0&1&0&0&0\\ 6&8&8&8&7\\ 0&8&8&3&0\\ 0&8&2&0&0 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 4&8&8&5\\ 6&8&8&7\\ 0&8&3&0\\ 0&2&0&0 \end{vmatrix} \overset{\text{1. sar}}{=} 4\cdot\begin{vmatrix} 8&8&7\\ 8&3&0\\ 2&0&0 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 8&8&5\\ 8&3&0\\ 2&0&0 \end{vmatrix} \overset{\text{3. sar.}}{=}$$

$$4\cdot 7\cdot\begin{vmatrix} 8&3\\ 2&0 \end{vmatrix} - 6\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 8&3\\ 2&0 \end{vmatrix} = -4\cdot 7\cdot 3\cdot 2 + 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = \underline{\underline{12}}$$

b) $\det A = 4 \quad \det B = -3$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \underline{\underline{-12}}$

$\det(5A) = 5^3 \cdot \det A = \underline{\underline{500}}$

$\underline{\det(B^{-1}AB)} = \frac{1}{\det B}\cdot \det A \cdot \det B$

$= \underline{\underline{4}}$

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a) $\det(A - \lambda I) = (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_{3,4} = 5$

b) $A\bar{v} = \lambda \bar{v} \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{v} = 0 \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1:$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow x_3 = x_4 = 0$ ja $x_1 = x_2$ $\quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_{3,4} = 5$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow x_4 = x_3 = x_2 = 0$, x_1 vapaa $\quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Diagonalisaatio $A = VDV^{-1}$ onnistuu, kun löytyy n kpl (tässä $n=4$) lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Tässä se vaatii, että ominaisarvolle 5 (tuplajuuri) löytyy kaksi ominaisvektoria. Yllä olevaa $(A-5I)$-matriisia katsomalla nähdään että toinen ominaisvektori (toinen vapaa muuttuja gaussauksen jälkeen) saadaan, kun $\underline{\underline{h=6}}$

3 a) $\boxed{x(a)=\frac{1-\sqrt{1-a}}{a} \qquad y(a)=\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}}$

$$\lim_{a\to 0}\underbrace{\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}}_{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}} = \lim_{a\to 0}\frac{1^2-(1-a)}{a(1+\sqrt{1-a})} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-a}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{1+\sqrt{1-a}}{a} = \text{"}\frac{2}{0}\text{"}$$

Tarkemmin:

$$\lim_{a\to 0+}\frac{1+\sqrt{1-a}\ (>0)}{a\ (>0)} = +\infty$$

$$\lim_{a\to 0-}\frac{1+\sqrt{1-a}}{a} = -\infty$$

Ei ole kysyttyä raja-arvoa $y(a)$:lle.

b) $f(x) = 1-2x^{\frac{1}{2}}-3x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^{-\frac{1}{2}}-9x^2$

$g(x) = 2+2x^{\frac{3}{2}}+x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}+3x^2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3}-2\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}-3\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{2}{x^3}-2\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+1\right)} = \underline{\underline{-3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}-9\right)}{x^2\left(3\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+3\right)} = \underline{\underline{-3}}$$

samoja L'H tosi tässä.

4 a) $\sin(2x) = 2\sin x\cos x \quad \| D \Rightarrow$ $\boxed{Dfg = f'g+g'f}$

$2\cos 2x = 2\cos x\cdot\cos x - 2\sin x\cdot\sin x \Rightarrow$

$\underline{\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x}$

b) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad D\frac{f}{g} = \frac{f'g-g'f}{g^2}$

$$\boxed{D\tan x = \frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$y = \tan(x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2(x^2)}\cdot 2x$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{\pi}$

Normaalisuora: $y-y_0 = -\frac{1}{k_t}(x-x_0) \Rightarrow$

$$y-1 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\left(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}x+\frac{5}{4}}}$$