Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Arponen/Alestalo/Liimatainen

Mat-1.1310 matematiikan peruskurssi K1

3. välikoe 16.12.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Funktiolla
$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x},$$
on maksimikohta välillä $[0, \pi]$. Osoita, että maksimikohta x toteuttaa yhtälön $\tan x = 1 + x$ ja määritä ratkaisun approksimaatio x_3 kiintopisteiteroinnilla alkuarvosta $x_0 = 1$. (Suppenemista ei tarvitse todistaa, mutta tulosten täytyy olla järkeviä.)

2. Yhtälö $\arctan x - \arctan y = \ln x + \ln y$ määrää yksikäsitteisen funktion $y = y(x)$ alueessa $x > 0,\ y > 0$. Määritä $y'(1)$ implisiittisen derivoinnin avulla, kun tiedetään, että $y(1) = 1$ (koska $x = y = 1$ toteuttaa yhtälön).

3. a) Laske epäoleellinen integraali
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$
b) Johda osittaisintegrointia käyttämällä palautuskaava
$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx,\quad n \geq 1.$$
c) Päättele a- ja b-kohtien avulla integraalin
$$\int_0^\infty x^5 e^{-x}\,dx$$
arvo.

4. a) Määritä integraalifunktio
$$\int \frac{x-3}{(x-7)(x+3)}\,dx.$$
b) Eräänä päivänä ilman lämpötila $f(t)$ hetkellä t mitattiin kahden tunnin välein (alkaen keskiyöstä), jolloin tulokseksi saatiin arvot 10, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 20, 19, 18, 16, 16, 14 astetta. Arvioi kyseisen vuorokauden keskilämpötilaa
$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt$$
käyttämällä Simpsonin sääntöä
$$S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n).$$
(Annettujen lukujen keskiarvon laskemisesta ei saa pisteitä.)

Huom: Yhden välikokeen voi uusia tentin yhteydessä 15.1.2009, jolloin maksimipistemäärä on 18. **Kaikkien uusintavälikokeeseen osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin!** Tentti ja välikoeuusinnat ovat samalla paperilla ja niistä voi valita yhden välikokeen tai tentin.

K1, VK3/2008 RATKAISUT/PA

1. $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot (1+x) - \sin x \cdot 1}{(1+x)^2} = 0 \iff \cos x \cdot (1+x) = \sin x$

$\iff \tan x = 1 + x \quad (x \geq 0)$

KP-YHTÄLÖ: $x = g(x) = \arctan(1+x)$. Iterointi: $x_0 = 1$,

$x_1 = g(x_0) = \arctan(2) \approx 1{,}10715$, $x_2 = \arctan(1+x_1) \approx 1{,}127695$

$x_3 = \arctan(1+x_2) \approx \underline{\underline{1{,}1314}}$ (ITEROINTI HAJ. MUODOSSA $x = \tan x - 1$)

---

2. $y = y(x)$ + derivointi: $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{y'(x)}{1+y(x)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{y'(x)}{y(x)}$

$x=1,\ y(1)=1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+1^2} + \dfrac{y'(1)}{1+y(1)^2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{y'(1)}{y(1)} \Rightarrow \underline{\underline{y'(1) = -1/3}}$

---

3. a) $\int_0^R e^{-x}\,dx = \Big/_0^R (-e^{-x}) = -e^{-R} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-R} \to 1$, kun $R \to \infty$

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \underline{\underline{1}}$ b) $\int_0^R x^m e^{-x}\,dx = \Big/_0^R x^m(-e^{-x}) - \int_0^R m x^{m-1} \cdot (-e^{-x})\,dx$

$= -R^m e^{-R} - 0 + m\int_0^R x^{m-1} e^{-x}\,dx \to m\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}$, kun $R \to \infty$

(koska $R^m e^{-R} \to 0\ \forall m$) $\Rightarrow$ VÄITE. c) $\int_0^\infty x^5 e^{-x}\,dx = 5\int_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx$

$= 5 \cdot 4 \int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = \ldots = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 5! = \underline{\underline{120}}$.

---

4. a) $\dfrac{x-3}{(x-7)(x+3)} = \dfrac{A}{x-7} + \dfrac{B}{x+3}$; $A = \dfrac{7-3}{7+3} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$, $B = \dfrac{-3-3}{-3-7} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \int \dfrac{x-3}{(x-7)(x+3)}\,dx = \dfrac{2}{5}\ln|x-7| + \dfrac{3}{5}\ln|x+3| + C \quad (x \neq 7,\ x \neq -3)$

b) $n = 12$, $h = \dfrac{24}{12} = 2$ (TUNTIA)

$\int_0^{24} f(t)\,dt \approx \underbrace{\dfrac{2}{3}\left(10 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 14 + \ldots + 4 \cdot 16 + 14\right)}_{S_{12}} = 384$

$\Rightarrow \dfrac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt = \dfrac{384}{24} = \underline{\underline{16\ (^\circ C)}}$