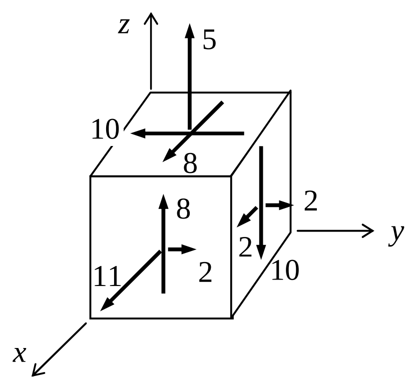
# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

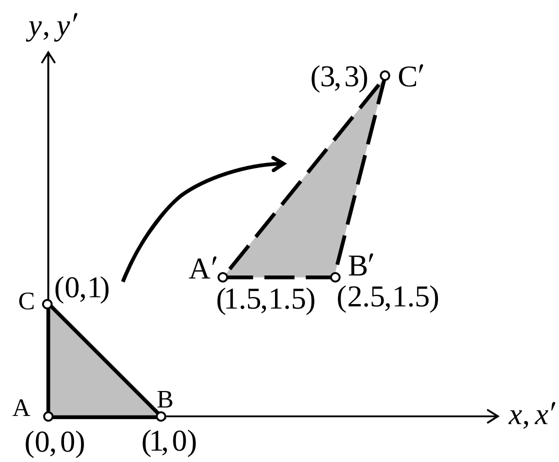
Tentti 8.3.2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

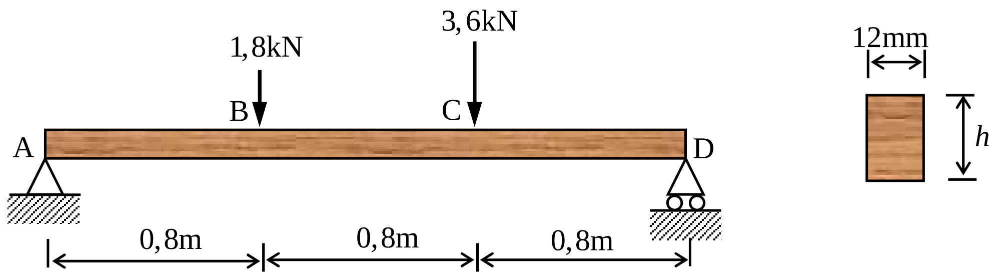
1. Oheisen jännitystilan pääjännitykset tunnetaan ja ne ovat suuruusjärjestyksessä $\sigma_I = 18\text{MPa}$, $\sigma_{II} = 9\text{MPa}$ ja $\sigma_{III} = -9\text{MPa}$. Määritä suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori. Määritä myös suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys sekä selitä millä tasoilla ne vaikuttavat. Yksikkönä on MPa.



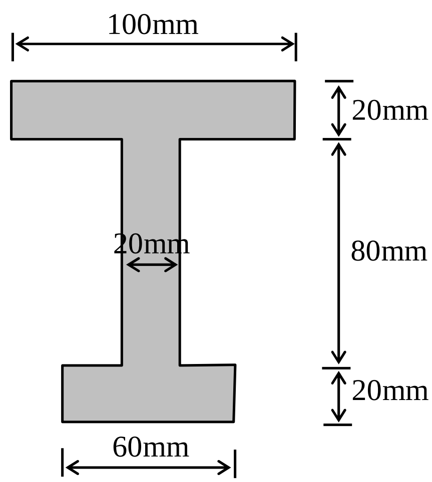

2. Kuvan kolmion muotoinen levy deformoituu siten, että nurkkapisteet A, B ja C siirtyvät pisteisiin A′, B′ ja C′ sekä deformaation geometriakuvaus kolmion alueella on lineaarinen. Määritä siirtymät $u(x,y)$ ja $v(x,y)$, Lagrangen venymät $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$ ja liukuma $\gamma_{xy}$.



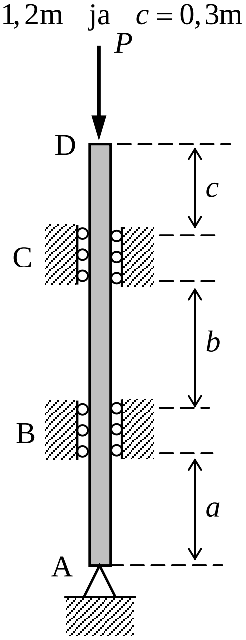
3. Mitoita oheisen puusta tehdyn palkin poikkileikkaus, jonka sallittu normaalijännitys on $12\text{MPa}$. Tarkista lopuksi, että sallittu leikkausjännitys $1\text{MPa}$ ei ylity tuen D vieressä olevassa poikkileikkauksessa.




4. Määritä täysplastinen momentti $M_p$ sauvalle, jonka poikkileikkaus on kuvan mukainen, kun poikkileikkausta taivutetaan vaaka-akselin ympäri. Materiaalin otaksutaan olevan kimmoista ideaaliplastista myötärajan ollessa $240\text{MPa}$.



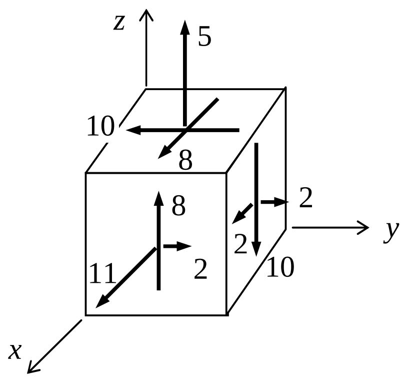

5. Alumiinisauva, jonka halkaisija on $25\text{mm}$, on tuettu kuvan mukaisesti. Tuki A estää vaaka- ja pystyliikkeen, rullatuet B ja C estävät vaakaliikkeen ja kiertymisen piirroksen tasossa. Määritä sallittu kuorma $P$, kun varmuusluku nurjahtamisen suhteen on $3{,}2$, $E = 77\text{GPa}$, $a = 0{,}9\text{m}$, $b = 1{,}2\text{m}$ ja $c = 0{,}3\text{m}$. Tarkastellaan vain kuvan tasossa tapahtuvaa nurjahdusta.



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 8.3.2007, ratkaisut

**1.**




Kuvan perusteella:

$\sigma_x = 11\text{MPa},\ \sigma_y = 2\text{MPa},\ \sigma_z = 5\text{MPa},\ \tau_{xy} = 2\text{MPa},\ \tau_{yz} = -10\text{MPa},\ \tau_{zx} = 8\text{MPa}$

$$\Rightarrow\ [\sigma] = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -10 \\ 8 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

Suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori:

$([\sigma] - \sigma_I[I])\{n\} = \{0\} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 11-\sigma_I & 2 & 8 \\ 2 & 2-\sigma_I & -10 \\ 8 & -10 & 5-\sigma_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 & 8 \\ 2 & -16 & -10 \\ 8 & -10 & -13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaistaan $n_x$ ja $n_y$ kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{matrix} -7n_x + 2n_y + 8n_z = 0 \\ 2n_x - 16n_y - 10n_z = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z = \frac{1}{(-7)\cdot(-16) - 2^2} \begin{bmatrix} -16 & -2 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z = \frac{1}{108} \begin{Bmatrix} 108 \\ -54 \end{Bmatrix} n_z = \begin{Bmatrix} n_z \\ -\frac{1}{2} n_z \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ n_x = n_z,\ n_y = -\frac{1}{2} n_z.$$

Sijoitetaan ne ehtoon $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, jolloin saadaan

$$n_z^2 + (-\frac{1}{2} n_z)^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{4} n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \frac{2}{3} \Rightarrow n_x = \frac{2}{3},\ n_y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{1}{3},\ n_z = \frac{2}{3}.$$

Tulos on

$$\underline{\underline{\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).}}$$

Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{18 - (-9)}{2} \approx \underline{\underline{13{,}5\text{MPa}}},\ \sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{18 + (-9)}{2} \approx \underline{\underline{4{,}5\text{MPa}}}$$

Tasot muodostavat $45°$ kulmat pääjännitysten vaikutustasojen kanssa.

**2.**

Esitetään lineaariset lausekkeet $x' = x'(x, y)$ ja $y' = y'(x, y)$ muodossa

$$x' = a_1 + a_2 x + a_3 y,$$

$$y' = b_1 + b_2 x + b_3 y,$$

jolloin kuvion perusteella saadaan

$$\left.\begin{aligned} x'(0,0) &= a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 1.5 \\ x'(1,0) &= a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 2.5 \\ x'(0,1) &= a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1.5 \\ 1.5 + a_2 = 2.5 \\ 1.5 + a_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1.5 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1.5 \end{cases}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} y'(0,0) &= b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = 1.5 \\ y'(2,0) &= b_1 + b_2 \cdot 1 + b_3 \cdot 0 = 1.5 \\ y'(0,2) &= b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1.5 \\ 1.5 + b_2 = 1.5 \\ 1.5 + b_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1.5 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 1.5 \end{cases}$$

ja lausekkeiksi $x' = x'(x, y)$ ja $y' = y'(x, y)$ saadaan

$$x' = 1.5 + x + 1.5y,$$

$$y' = 1.5 + 1.5y.$$

Siirtymille saadaan

$$u = x' - x = 1.5 + x + 1.5y - x = \underline{\underline{1.5 + 1.5y}},$$

$$v = y' - y = 1.5 + 1.5y - y. = \underline{\underline{1.5 + 0.5y}}.$$

Siirtymien osittaisderivaatoille saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1.5,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.5.$$

Venymille saadaan

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2] = \underline{\underline{0}}$$

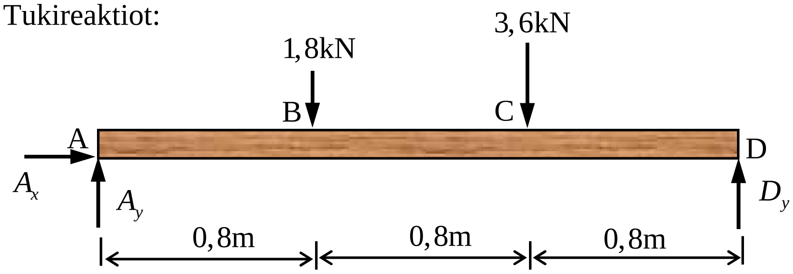
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2] = 0.5 + \frac{1}{2}(1.5^2 + 0.5^2) = 0.5 + \frac{1}{2}(2.25 + 0.25) = \underline{\underline{1.75}}$$

Liukumalle saadaan

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 1.5 + 0 + 0 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0.5 = \underline{\underline{1.5}}$$

**3.**

Tukireaktiot:

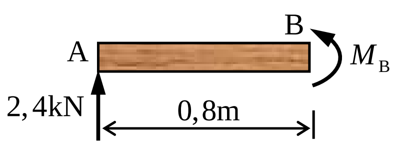


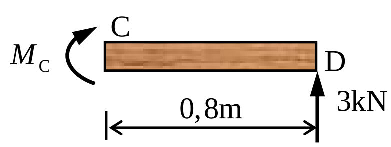

$\rightarrow \quad A_x = \underline{0}$

$\circlearrowleft \mathrm{D} \quad -A_y \cdot 2,4\mathrm{m} + 1,8\mathrm{kN} \cdot 1,6\mathrm{m} + 3,6\mathrm{kN} \cdot 0,8\mathrm{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \underline{2,4\mathrm{kN}}$

$\circlearrowleft \mathrm{A} \quad D_y \cdot 2,4\mathrm{m} - 3,6\mathrm{kN} \cdot 1,6\mathrm{m} - 1,8\mathrm{kN} \cdot 0,8\mathrm{m} = 0 \;\Rightarrow\; D_y = \underline{3\mathrm{kN}}$

Taivutusmomentit pisteissä B ja C:




$\circlearrowleft \mathrm{B} \quad -2,4\mathrm{kN} \cdot 0,8\mathrm{m} + M_\mathrm{B} = 0$

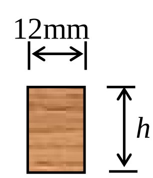
$\Rightarrow M_\mathrm{B} = \underline{1,92\mathrm{kNm}}$

$\circlearrowleft \mathrm{C} \quad 3\mathrm{kN} \cdot 0,8\mathrm{m} - M_\mathrm{C} = 0$

$\Rightarrow M_\mathrm{C} = \underline{2,4\mathrm{kNm}}$

$\Rightarrow M_{\max} = M_\mathrm{C} = \underline{2,4\mathrm{kNm}}$

Jäyhyysmomentti ja taivutusvastus:




$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12\mathrm{mm} \cdot h^3}{12} = 1\mathrm{mm} \cdot h^3, \; W = \frac{I}{h/2} = 2\mathrm{mm} \cdot h^2$$

Suurin normaalijännitys:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{2,4\mathrm{kNm}}{2\mathrm{mm} \cdot h^2} = \frac{1,2 \cdot 10^6}{h^2}\mathrm{N}$$

Ehto:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\mathrm{sall}} \;\Rightarrow\; \frac{1,2 \cdot 10^6 \mathrm{N}}{h^2} = 12\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \;\Rightarrow\; h = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 10^6}{12}\mathrm{mm}^2} = \underline{\underline{316,2\mathrm{mm}}}$$

Leikkausvoima tuella D:

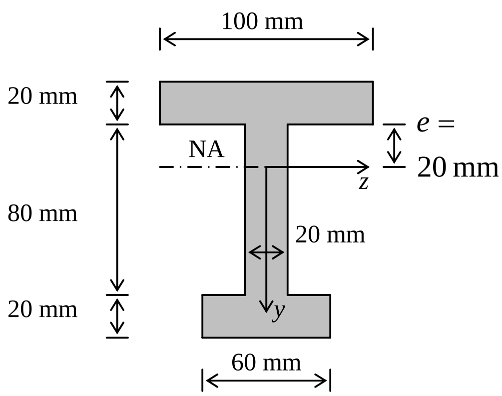
$$Q_\mathrm{B} = -D_y = -3\mathrm{kN}$$

Leikkausjännityksen tarkistus tuella D:

$$S_{\max} = S(0) = b\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}, \tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{Ib} = \frac{Q\cdot bh^2/8}{bh^3/12\cdot b} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{-3\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{12\mathrm{mm}\cdot 316,2\mathrm{mm}} = -0,791\mathrm{MPa}$$

$|\tau_{\max}| < \tau_{sall} = 1\mathrm{MPa}$, OK.

**4.**




Neutraaliakselin (NA) paikka sijoittuu siten, että $A_{\text{ala}} = A_{\text{ylä}}$. Koko poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A = (100\cdot 20 + 80\cdot 20 + 60\cdot 20)\mathrm{mm}^2 = 4800\ \mathrm{mm}^2$$

$$\Rightarrow \quad A_{\text{ala}} = A_{\text{ylä}} = 2400\ \mathrm{mm}^2 \text{ joten } e = 20\ \mathrm{mm}.$$

Täysplastinen momentti:

$$M_p = \sigma_p W_p,$$

missä plastinen taivutusvastus on

$$W_p = S_{\text{ala}} + |S_{\text{ylä}}|,$$

missä staattiset momentit ovat:

$$S_{\text{ala}} = (60\cdot 20\cdot 70 + 20\cdot 60\cdot 30)\mathrm{mm}^3 = 120000\ \mathrm{mm}^3,$$
$$|S_{\text{ylä}}| = (100\cdot 20\cdot 30 + 20\cdot 20\cdot 10)\mathrm{mm}^3 = 64000\ \mathrm{mm}^3,$$

joten $W_p = (120000 + 64000)\mathrm{mm}^3 = 184000\ \mathrm{mm}^3$ ja täysplastiselle momentille saadaan

$$M_p = 240\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot 184000\ \mathrm{mm}^3 = 44.16\ \mathrm{kNm}.$$

**5.**

Jäyhyysmomentti: $I = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{4}\pi(25\text{mm}/2)^4 = \underline{19175\text{mm}^4}$

<u>Väli AB:</u>

Nurjahduspituus: $l_n = 0,7a = 0,7 \cdot 900\text{mm=630mm}$

Kriittinen kuorma: $P_{\text{kr}}^{\text{AB}} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 77\text{kN/mm}^2 \cdot 19175\text{mm}^4}{(630\text{mm})^2} = \underline{36,72\text{kN}}$

<u>Väli BC:</u>

Nurjahduspituus: $l_n = b/2 = 1200\text{mm}/2 = 600\text{mm}$

Kriittinen kuorma: $P_{\text{kr}}^{\text{BC}} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 77\text{kN/mm}^2 \cdot 19175\text{mm}^4}{(600\text{mm})^2} = \underline{40,48\text{kN}}$

<u>Väli CD:</u>

Nurjahduspituus: $l_n = 2c = 2 \cdot 300\text{mm} = 600\text{mm}$

Kriittinen kuorma: $P_{\text{kr}}^{\text{CD}} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 77\text{kN/mm}^2 \cdot 19175\text{mm}^4}{(600\text{mm})^2} = \underline{40,48\text{kN}}$

Koko sauvan kriittinen kuorma on näistä pienin:

$P_{\text{kr}} = P_{\text{kr}}^{\text{AB}} = 36,72\text{kN}$

Sallittu kuorma:

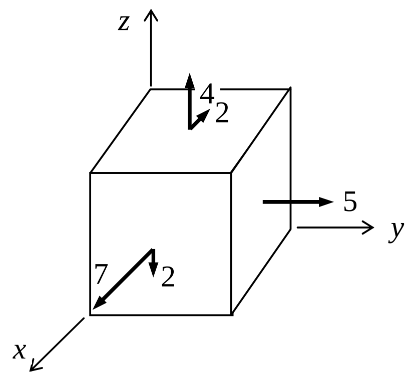
$$\frac{P_{\text{kr}}}{P_{\text{sall}}} = n \Rightarrow P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{36,72\text{kN}}{3,2} = \underline{\underline{11,5\text{kN}}}$$

## Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 10.01.2008

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

1. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila $x, y, z$ -koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla.




Määritä jännityskomponentit ja jännitysmatriisi sekä jännitysvektori (traktio), normaalijännitys, normaalijännitysvektori, leikkausjännitysvektori sekä leikkausjännityksen suuruus pisteen P kautta kulkevalla tasolla, jonka yksikkönormaalivektori on

$$\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} .$$

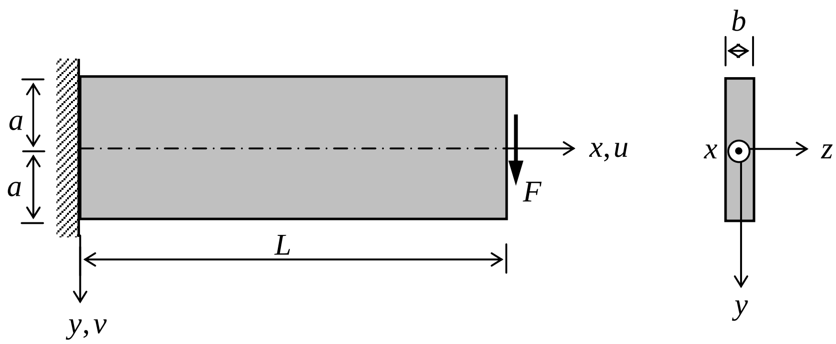
Yksiköt ovat MPa.

2. Oheinen suorakaiteen muotoinen levy on tasojännitystilassa. Se on vasemmasta päästään kiinnitetty jäykkään tukeen ja sen oikeassa päässä vaikuttaa kuorma, jonka resultantti on $F$. Sen siirtymäkenttä on

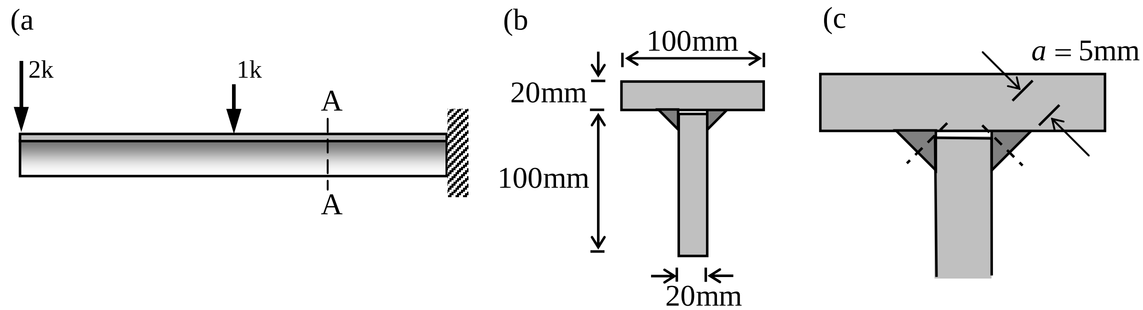
$$u(x, y) = \frac{F}{4Ea^3b}[(2+\nu)y(a^2 - y^2) - 3(2Lx - x^2)y],$$

$$v(x, y) = \frac{F}{4Ea^3b}[3\nu(L-x)y^2 + 3Lx^2 - x^3 + (4+5\nu)a^2x],$$

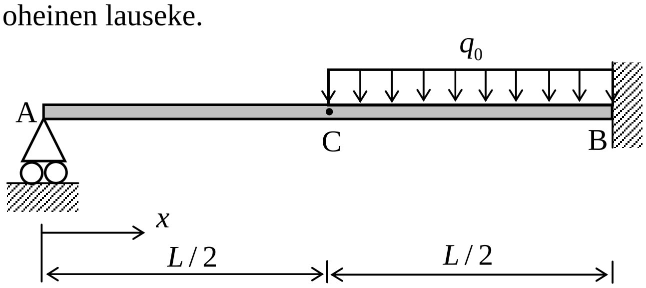
missä $E$ on levyn kimmomoduuli ja $\nu$ on sen Poissonin vakio. Määritä levyn venymä- ja jännityskomponentit.



3. Määritä hitsisauman (keskimääräinen) leikkausjännitys sekä poikkileikkauksen leikkausjännityksen $\tau_{xy}$ itseisarvoltaan suurin arvo oheisen palkin kohdassa A-A. Vinot pinnat, joilla hitsisauman keskimääräinen leikkausjännitys lasketaan, on esitetty katkoviivalla kuvan (c) leikkauksessa. Uuman ja laipan välille oletetaan rako. Hitsin vaikutusta poikkileikkaussuureisiin ei huomioida.

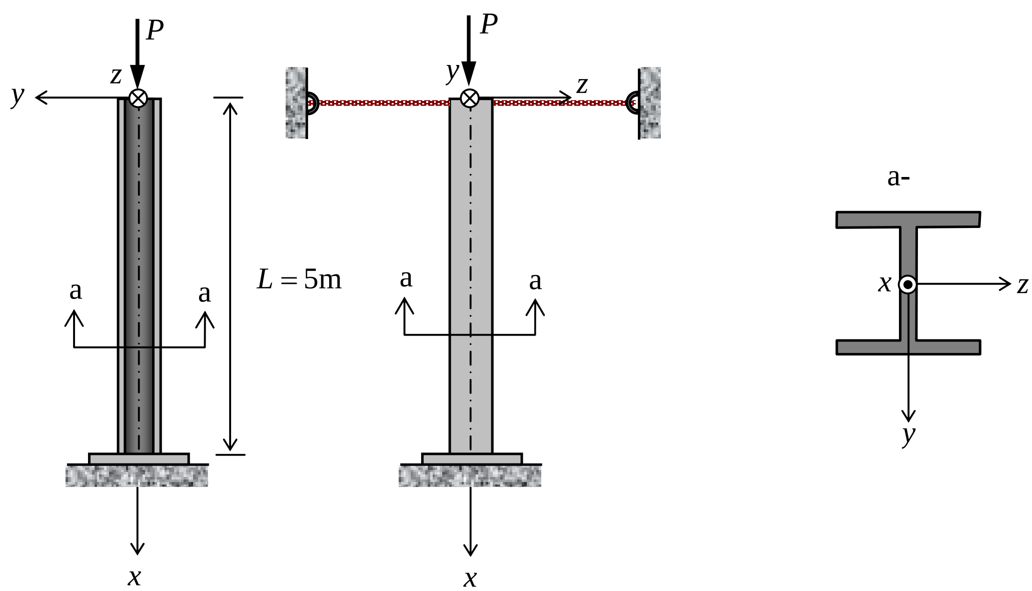



4. Johda lähtien palkin taipuma differentiaaliyhtälöstä oheisen palkin taivutusmomentille oheinen lauseke.




$$M = q_0\left(\frac{21}{384}Lx - \frac{1}{2}\langle x - \frac{L}{2}\rangle^2\right)$$

5. Alumiinipilari on alapäästään jäykästi kiinnitetty ja se on tuettu yläpäästään vaijereilla siten, että pään liike $z$-akselin suunnassa on estetty. Määritä suurin mahdollinen kuorma $P$, joka voidaan sallia, kun varmuusluku nurjahduksen suhteen on 3,0. Huomioi nurjahdus sekä $x, y-$ että $x, z-$tasossa. Tarkista lopuksi, että pilari ei myötää kriittisen kuorman alaisena. Käytä seuraavia arvoja: $E = 70\,\text{GPa}$, $\sigma_m = 215\,\text{MPa}$, $A = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2$, $I_y = 23{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$ ja $I_z = 61{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$.



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 10.01.2008, ratkaisut

**1.**

Jännityskomponentit:

$\sigma_x = 7,\ \sigma_y = 5,\ \sigma_z = 4,$

$\tau_{xy} = 0,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = -2$

Jännitysmatriisi:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jännitysvektori:

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \underline{\underline{(4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j})}}$$

Normaalijännitys:

$$\sigma_n = \mathbf{n} \bullet \mathbf{t}^{(n)} = (\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}) \bullet (4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j}) = \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{2}{3}\cdot\frac{10}{3} = \underline{\underline{\frac{44}{9}}}$$

Normaalijännitysvektori:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} = \frac{44}{9}(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}}$$

Leikkausjännitysvektori:

$$\boldsymbol{\tau}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = 4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j} - \frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{2}{27}(10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k})}}$$

Leikkausjännityksen suuruus:

$$\tau^{(n)} = \sqrt{|\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{4^2 + (-\frac{10}{3})^2 - (\frac{44}{9})^2} = \sqrt{\frac{260}{81}} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

tai

$$\tau^{(n)} = |\boldsymbol{\tau}^{(n)}| = \frac{2}{27}|10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k}| = \frac{2}{27}\sqrt{10^2 + 1^2 + 22^2} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

**2.**

Venymäkomponentit:

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F}{4Ea^3b}[-3(2L-2x)y] = \underline{\underline{-\frac{3F}{2Ea^3b}(L-x)y}},$$

$$\varepsilon_y \equiv \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{F}{4Ea^3b}6\nu(L-x)y = \underline{\underline{\frac{3F\nu}{2Ea^3b}(L-x)y}},$$

$$\gamma_{xy} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{F}{4Ea^3b}[(2+\nu)(a^2-y^2) - 2(2+\nu)y^2 - 3(2Lx-x^2)]$$

$$= \frac{F}{4Ea^3b}[-3\nu y^2 + 6Lx - 3x^2 + (4+5\nu)a^2]$$

$$= \underline{\underline{\frac{6F}{4Ea^3b}(1+\nu)(a^2-y^2)}}$$

Jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\overbrace{\sigma_z}^{0}),\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\overbrace{\sigma_z}^{0} - \nu\sigma_x),\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu\sigma_y = E\varepsilon_x \\ \sigma_y - \nu\sigma_x = E\varepsilon_y \mid \cdot\nu \end{cases} \Rightarrow (1-\nu^2)\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \Rightarrow \sigma_x = \underline{\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu\sigma_y = E\varepsilon_x \mid \cdot\nu \\ \sigma_y - \nu\sigma_x = E\varepsilon_y \end{cases} \Rightarrow (1-\nu^2)\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \Rightarrow \sigma_y = \underline{\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xy} = \underline{G\gamma_{xy}}$$

Jännityskomponentit:

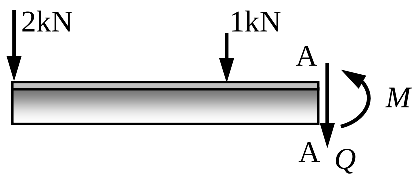
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[-\frac{3F}{2Ea^3b}(L-x)y + \nu\frac{3F\nu}{2Ea^3b}(L-x)y] = \underline{\underline{-\frac{3F}{2a^3b}(L-x)y}}$$

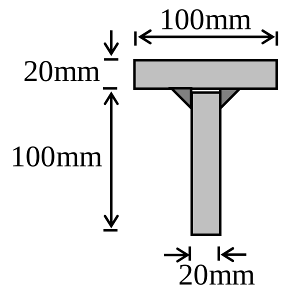
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[\frac{3F\nu}{2Ea^3b}(L-x)y - \nu\cdot\frac{3F}{2Ea^3b}(L-x)y] = \underline{\underline{0}}$$

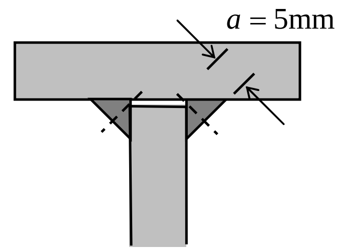
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{6F}{4Ea^3b}(1+\nu)(a^2-y^2) = \underline{\underline{\frac{3F}{4a^3b}(a^2-y^2)}}$$

**3.**

Leikkausvoima:

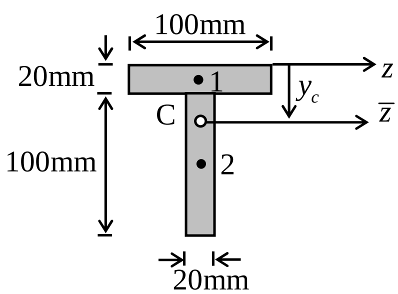



$$Q + 1\text{kN}+2\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; Q = -3\text{kN}$$

Pintakeskiö:




$$A_1 = 100\cdot 20 = 2000\text{m}^2,\quad A_2 = 20\cdot 100 = 2000\text{mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 4000\text{mm}^2$$

$$y_1 = 10\text{mm},\; y_2 = 20\text{mm} + \frac{1}{2}\cdot 100\text{mm} = 70\text{mm}$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = 40\text{mm}$$

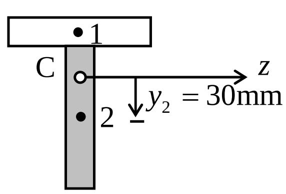
Jäyhyysmomentti $I_z$:

$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2 = \frac{100\cdot 20^3}{12} + 2000\cdot 10^2 + \frac{20\cdot 100^3}{12} + 2000\cdot 70^2 = 11{,}73\cdot 10^6\,\text{mm}^4$$

Jäyhyysmomentti $I = I_{\bar{z}}$:

$$I_z = I_{\bar{z}} + Ay_c \;\Rightarrow\; I \equiv I_{\bar{z}} = I_z - Ay_c^2 = 11{,}73\cdot 10^6 - 4000\cdot 40^2 = \underline{5{,}33\cdot 10^6\,\text{mm}^4}$$

Hitsisauman alapuoleisen osan staattinen momentti:

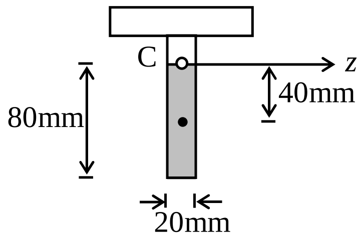



$$S_2 = A_2 \cdot y_2 = 2000\cdot 30 = 60000\text{mm}^3$$

Leikkausvuo ja hitsin leikkausjännitys:

$$q = \frac{QS_2}{I} = \frac{-3\cdot 10^3\,\text{N}\cdot 60000\text{mm}^3}{5{,}33\cdot 10^6\,\text{mm}^4} = -33{,}77\text{N/mm},\quad \bar{\tau} = \frac{-33{,}77\,\text{N/mm}}{2\cdot 5\text{mm}} = \underline{\underline{-3{,}38\text{MPa}}}$$

z-akselin alapuoleisen osan staattinen momentti:



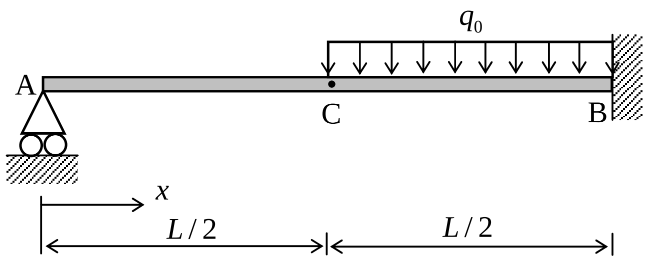

$$S(0) = 20 \cdot 80 \cdot 40 = 64000\text{mm}^3$$

Leikkausjännitys:

$$\tau_{xy}(0) = \frac{QS(0)}{Ib} = \frac{-3 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot 64000\text{mm}^3}{5,33 \cdot 10^6\,\text{mm}^4 \cdot 20\text{mm}} = \underline{-1,80\text{MPa}}$$

$$\Rightarrow \;|\tau_{xy}|_{\max} = \underline{\underline{1,80\text{MPa}}}$$

**4.**




Differentiaaliyhtälön ratkaisu:

$$v^{(4)} = \frac{q_0}{EI} < x - \frac{L}{2} >^0 \quad \Rightarrow \quad v''' = \frac{q_0}{EI} < x - \frac{L}{2} >^1 + C_1$$

$$\Rightarrow \quad v'' = \frac{q_0}{2EI} < x - \frac{L}{2} >^2 + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad v' = \frac{q_0}{6EI} < x - \frac{L}{2} >^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{q_0}{24EI} < x - \frac{L}{2} >^4 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

Reunaehdot:

$$v(0) \equiv C_4 = 0$$

$$M(0) \equiv -EIv''(0) \equiv -EIC_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$v(L) \equiv \frac{q_0}{24EI} < \overbrace{L - \frac{L}{2}}^{L/2} >^4 + \frac{C_1}{6} L^3 + \frac{C_2}{2} L^2 + C_3 L + C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1}{6} L^3 + C_3 L = -\frac{q_0 L^4}{384EI}$$

$$\varphi(L) \equiv v'(L) \equiv \frac{q_0}{6EI} < \overbrace{L - \frac{L}{2} a}^{L/2} >^3 + \frac{C_1}{2} L^2 + C_2 L + C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1}{2} L^2 + C_3 = -\frac{q_0 L^3}{48EI}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{L^2}{6} C_1 + C_3 &= -\frac{q_0 L^3}{384EI} \\ \frac{L^2}{2} C_1 + C_3 &= -\frac{q_0 L^3}{48EI} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{L^2}{2} C_1 - \frac{L^2}{6} C_1 = -\frac{q_0 L^3}{48EI} + \frac{q_0 L^3}{384EI} = -\frac{7 q_0 L^3}{384EI}$$

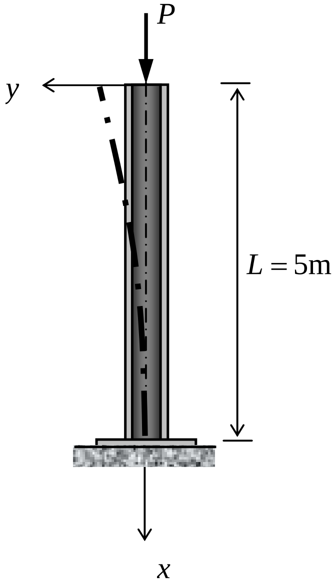
$$\Rightarrow \quad \underline{C_1 = -\frac{21 q_0 L}{384EI}}, \quad \left(C_3 = -\frac{q_0 L^3}{48EI} - \frac{L^2}{2} C_1 = -\frac{q_0 L^3}{48EI} + \frac{21 q_0 L^3}{768EI} = \frac{5 q_0 L^3}{768EI}\right)$$

Taivutusmomentti:

$$M \equiv -EIv'' = -\frac{q_0}{2} < x - \frac{L}{2} >^2 - EIC_1 x - EIC_2 = \underline{\underline{q_0 \left(\frac{21}{384} Lx - \frac{1}{2} < x - \frac{L}{2} >^2\right)}}$$

**5.**

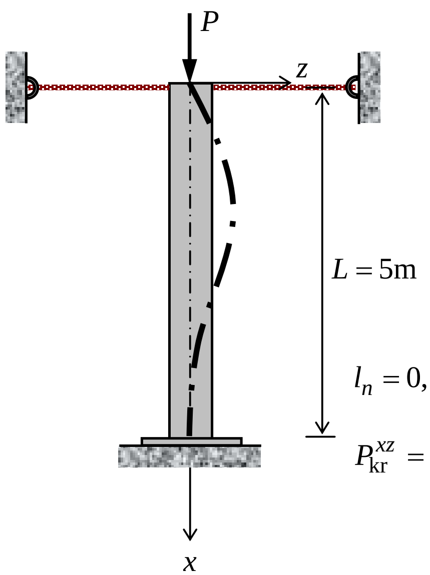
Nurjahdus $x, y-$tasossa:




$l_n = 2L = 10\text{m}$

$$P_{\text{kr}}^{xy} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6 \,\text{kPa} \cdot 61{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4}{(10\text{m})^2} = 423{,}5\text{kN}$$

Nurjahdus $x, z-$tasossa:




$l_n = 0{,}70 \cdot L = 3{,}5\text{m}$

$$P_{\text{kr}}^{xz} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6 \,\text{kPa} \cdot 23{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4}{(3{,}5\text{m})^2} = 1308\text{kN}$$

Kriittinen kuorma:

$P_{\text{kr}} = \min\{P_{\text{kr}}^{xy}, P_{\text{kr}}^{xz}\} = 423{,}5\text{kN}$

Sallittu kuorma:

$$P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{423{,}5\text{kN}}{3{,}0} = \underline{\underline{141{,}2\text{kN}}}$$

Normaalijännitys:

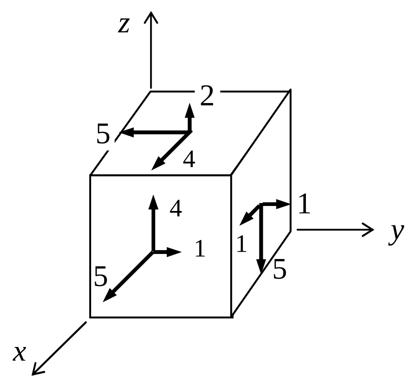
$$\sigma = -\frac{P_{\text{kr}}}{A} = -\frac{423{,}5\text{kN}}{7{,}5 \cdot 10^{-3}\text{m}^2} = -56500\text{kPa} = \underline{\underline{-56{,}5\text{MPa} > -230\text{MPa} = -\sigma_m,\ \text{OK}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 11.1.2007

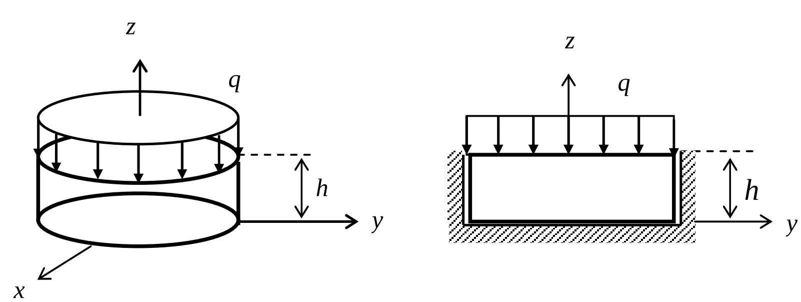
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

1. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila $x, y, z$-koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla



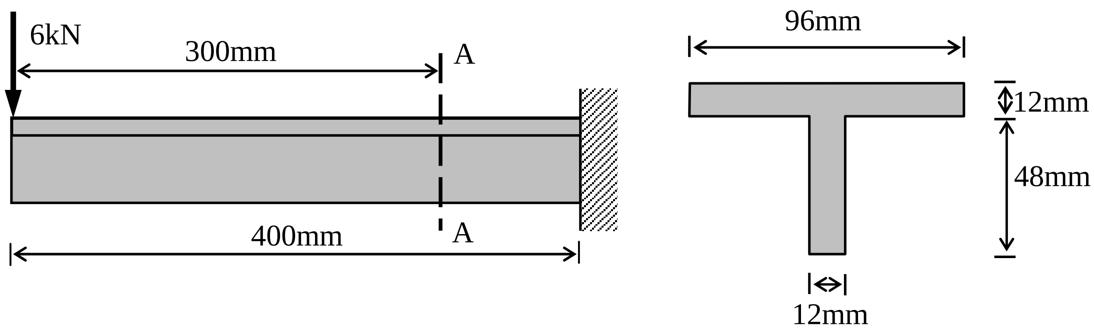

Yksiköt ovat MPa. Määritä (a) jännitysinvariantit, (b) pääjännitykset ja (c) suurin leikkausjännitys pisteessä P.

2. Maakerrosten painuma-analyysin yhteydessä käytetään ns. ödometrikoetta (vrt. kuva). Siinä sylinterimäisessä rasiassa olevaa näytettä kuormitetaan sylinterin akselin ($z$-akseli) suunnassa. Näyte deformoituu siten, että pelkästään $z$-akselin suuntainen liike on mahdollinen. Likitarkastelussa rasian ja näytteen välinen kitka sekä näytteen oma paino voidaan jättää huomiotta. Näytteen siirtymätila on siis: $u = v = 0,\ w = w(z)$. Ödometrikokeen muodonmuutostilaan liittyen määritellään ns. kokoonpuristuvuuskerroin $m_v$ ja lepopainekerroin $K_0$ lausekkeilla $\varepsilon_V = m_v\sigma_z$ ja $\sigma_x = \sigma_y = K_0\sigma_z$, missä $\varepsilon_V$ on näytteen suhteellinen tilavuuden muutos ja muut merkinnät ovat tavanomaiset. Otaksutaan, että maanäyte on isotrooppista ja lineaarisesti kimmoista materiaalia. Lausu kokoonpuristuvuuskerroin ja lepopainekerroin kimmomoduulin $E$ ja Poissonin vakion $\nu$ avulla.

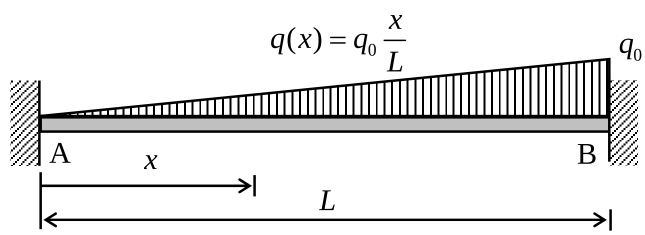



3. Oheisella ulokepalkilla on T:n muotoinen poikkileikkaus ja sen symmetriatasossa vaikuttaa pystysuora pistekuorma. Määritä (a) palkin itseisarvoltaan suurin

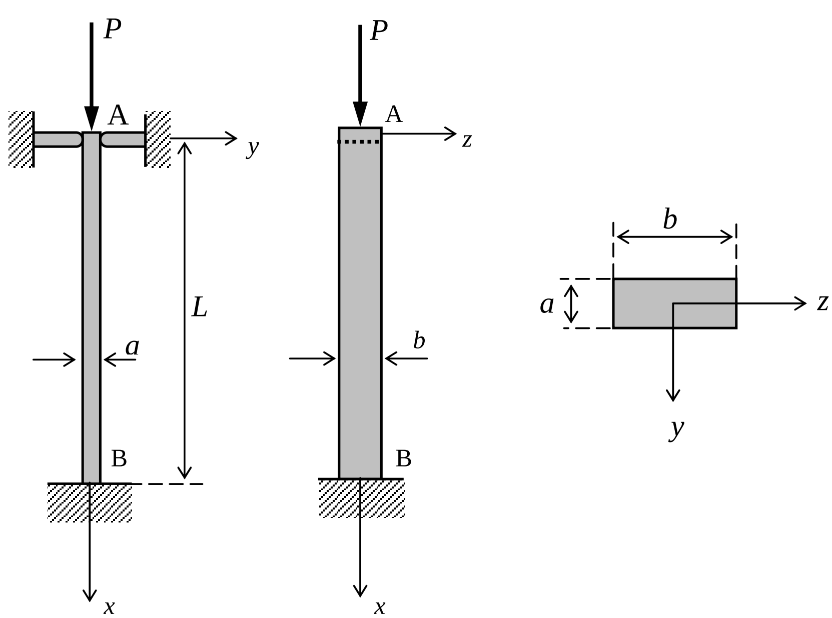
normaalijännitys poikkileikkauksessa A-A sekä (b) itseisarvoltaan suurin leikkausjännitys.




4. Oheista tasajäykkää päistään jäykästi kiinnitettyä palkkia, jonka taivutusjäykkyys on $EI$, kuormittaa kolmiokuorma $q(x)$, jonka intensiteetti palkin oikeassa päässä B on $q_0$. Määritä palkin taipuman ja taivutusmomentin lausekkeet ratkaisemalla taipuman differentiaaliyhtälö.



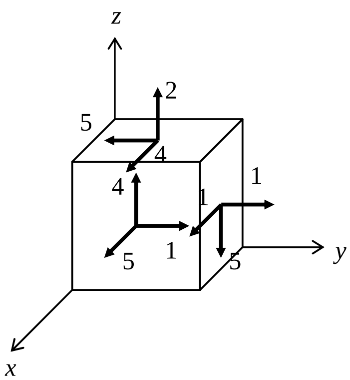

5. Alumiinisen pilarin kimmomoduuli ja pituus ovat $E = 70\text{GPa}$ ja $L = 500\text{mm}$. Sen poikkipinta on suorakaide, jonka sivujen pituudet ovat $a = 15\text{mm}$ ja $b = 35\text{mm}$. Pilari on päästä B jäykästi kiinnitetty ja sitä kuormittaa keskeinen kuorma $P$ päässä A. Kaksi kiinteätä sileää pyöreäreunaista levyä estää pään A liikkeen toisessa pystysuorassa symmetriatasossa ja sallii sen liikkeen toisessa. Kuinka suuri puristusvoima $P$ pilariin voidaan sallia, jos varmuusluku nurjahduksen suhteen on 2,5.



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 11.1.2007, ratkaisut

**1.**




Jännitysmatriisi:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -5\\ 4 & -5 & 2\end{bmatrix}.$$

**Ratkaisu:**

(a)

$$I_1 = 5+1+2 = \underline{\underline{8}},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -5\\ -5 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix} = 5-1+2-25+10-16 = \underline{\underline{-25}}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix}5 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -5\\ 4 & -5 & 2\end{vmatrix} = 10-20-20-(125+2+16) = \underline{\underline{-173}}$$

(b)

$$\sigma^3 - 8\sigma^2 - 25\sigma + 173 = 0$$

$$a = -8,\ b = -25,\ c = 173$$

$$Q = \frac{3(-25)-(-8)^2}{9} = -\frac{139}{9},\ R = \frac{9(-8)(-25)-27\cdot 173-2(-8)^3}{54} = -\frac{1847}{54}$$

$$D = Q^3 + R^2 = -2514,05 < 0,\ \text{OK}$$

$$\varphi = \arccos\frac{-1847/54}{\sqrt{(139/9)^3}} = 124,30^\circ$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{\frac{139}{9}}\cos(\frac{1}{3}\cdot 124,30^\circ) - \frac{-8}{3} = \underline{\underline{8,5594\text{MPa}}}$$

$$\sigma_2 = 2\sqrt{\frac{139}{9}}\cos(\frac{1}{3}\cdot 124,30^\circ + 120^\circ) - \frac{-8}{3} = \underline{\underline{-4,7841\text{MPa}}}$$

$$\sigma_3 = 2\sqrt{\frac{139}{9}}\cos(\frac{1}{3}\cdot 124,30^\circ + 240^\circ) - \frac{-8}{3} = \underline{\underline{4,2247\text{MPa}}}$$

(c)

$$\tau_{\max} = \frac{8,5594-(-4,7841)}{2} = \underline{\underline{6,6718\text{MPa}}}$$

**2.**

Muodonmuutoksille $\varepsilon_x$ ja $\varepsilon_y$ saadaan

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \overbrace{u}^{0}}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \overbrace{v}^{0}}{\partial y} = 0$$

Hooken laista seuraa

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = 0 \\ \varepsilon_y &\equiv \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu\sigma_y = \nu\sigma_z \\ -\nu\sigma_x + \sigma_y = \nu\sigma_z \mid \cdot\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu\sigma_y = \nu\sigma_z \\ -\nu^2\sigma_x + \nu\sigma_y = \nu^2\sigma_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-\nu^2)\sigma_x = (1+\nu)\nu\sigma_z \Rightarrow \underline{\sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z}$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) = \nu(\frac{\nu}{1-\nu}+1)\sigma_z = \underline{\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z}$$

Vertaamalla määrittelyyn $\sigma_x = \sigma_y = K_0\sigma_z$ nähdään, että

$$\underline{\underline{K_0 = \frac{\nu}{1-\nu}}}$$

Suhteellinen tilavuuden muutos on

$$\varepsilon_V = \overbrace{\varepsilon_x}^{0} + \overbrace{\varepsilon_y}^{0} + \varepsilon_z = \varepsilon_z$$

Hooken laista seuraa

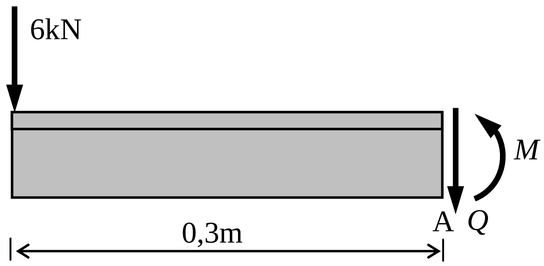
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E}(1-2\nu K_0)\sigma_z = \frac{1}{E}(1-\frac{2\nu^2}{1-\nu})\sigma_z = \frac{1}{E}\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\sigma_z$$

Vertaamalla määrittelyyn $\varepsilon_V = \varepsilon_z = m_v\sigma_z$ nähdään,että

$$\underline{\underline{m_v = \frac{1}{E}\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}}}$$

**3.**

Leikkausvoima ja taivursmomentti:

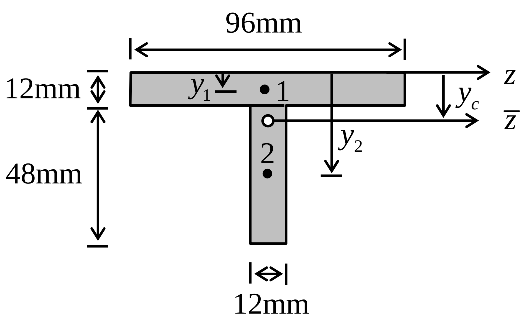



$$\downarrow \quad Q + 6\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; Q = \underline{-6\text{kN}}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad M + 6\text{kN} \cdot 0{,}3\text{m} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{M = -1{,}8\text{kNm}}$$

Pintakeskiö:




$$A_1 = 96 \cdot 12 = 1152\text{mm}^2, \quad A_2 = 48 \cdot 12 = 576\text{mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 1728\text{mm}^2$$

$$y_1 = 6\text{mm}, \; y_2 = 12\text{mm} + \frac{1}{2} \cdot 48\text{mm} = 36\text{mm}$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = 16\text{mm}$$

Jäyhyysmomentti $I_z$:

$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2 = \frac{96 \cdot 12^3}{12} + 1152 \cdot 6^2 + \frac{12 \cdot 48^3}{12} + 576 \cdot 36^2 = 912384\text{mm}^4$$

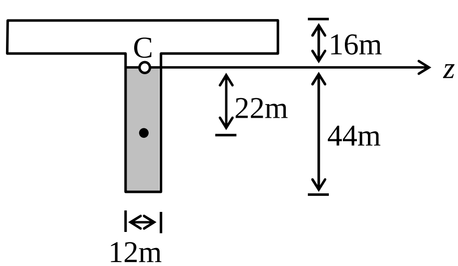
Jäyhyysmomentti $I = I_{\bar{z}}$:

$$I_z = I_{\bar{z}} + A y_c \;\Rightarrow\; I \equiv I_{\bar{z}} = I_z - A y_c = 912384 - 1728 \cdot 16^2 = \underline{470016\text{mm}^4}$$

Maksimi normaalijännitys:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ylä} &= \frac{M}{I} y_{ylä} = \frac{-1{,}8 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{470016\text{mm}^4} \cdot (-16\text{mm}) = \underline{61{,}3\text{MPa}} \\ \sigma_{ala} &= \frac{M}{I} y_{ala} = \frac{-1{,}8 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{470016\text{mm}^4} \cdot 44\text{mm} = \underline{-168{,}5\text{MPa}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; |\sigma|_{\max} = \underline{\underline{168{,}5\text{MPa}}}$$

Maksimi leikkausjännitys:

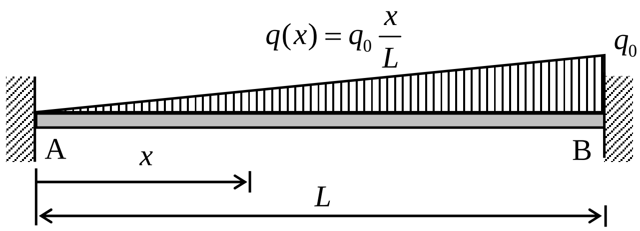



$$S = 12 \cdot 44 \cdot 22 = 11616\text{mm}^3$$

$$\tau_{xy}(0) = \frac{QS}{Ib} = \frac{-6 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot 11616\text{mm}^3}{470016\text{mm}^4 \cdot 12\text{mm}} = \underline{-12{,}4\text{MPa}}$$

$$\Rightarrow \; |\tau_{xy}|_{\max} = \underline{\underline{12{,}4\text{MPa}}}$$

**4.**




Differentiaaliyhtälön ratkaisu:

$$v^{(4)} = \frac{q_0}{EIL} x \;\Rightarrow\; v''' = \frac{q_0}{2EIL} x^2 + C_1 \;\Rightarrow\; v'' = \frac{q_0}{6EIL} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow\; v' = \frac{q_0}{24EIL} x^4 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \;\Rightarrow\; v = \frac{q_0}{120EIL} x^5 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

Reunaehdot:

$$v(0) \equiv C_4 = 0,$$

$$\varphi(0) \equiv v'(0) \equiv C_3 = 0,$$

$$v(L) \equiv \frac{q_0}{120EIL} L^5 + \frac{C_1}{6} L^3 + \frac{C_2}{2} L^2 + C_3 L + C_4 = 0,$$

$$\varphi(L) \equiv \frac{q_0}{24EIL} L^4 + \frac{C_1}{2} L^2 + C_2 L + C_3 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{L}{3} C_1 + C_2 &= -\frac{q_0}{60EI} L^2 \\ \frac{L}{2} C_1 + C_2 &= -\frac{q_0}{24EI} L^2 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{L}{2} C_1 - \frac{L}{3} C_1 = -\frac{q_0}{24EI} L^2 + \frac{q_0}{60EI} L^2 \;\Rightarrow\; \frac{L}{6} C_1 = -\frac{q_0}{40EI} L^2$$

$$\Rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{3q_0 L}{20EI}}, \quad C_2 = -\frac{q_0}{24EI} L^2 - \frac{L}{2} C_1 = \left(-\frac{1}{24} + \frac{3}{40}\right) \frac{q_0 L^2}{EI} = \underline{\frac{1}{30} \frac{q_0 L^2}{EI}}$$

Taipuma:

$$v = \frac{q_0}{120EIL} x^5 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 = \frac{q_0}{120EIL} x^5 - \frac{q_0 L}{40EI} x^3 + \frac{1}{60} \frac{q_0 L^2}{EI} x^2$$

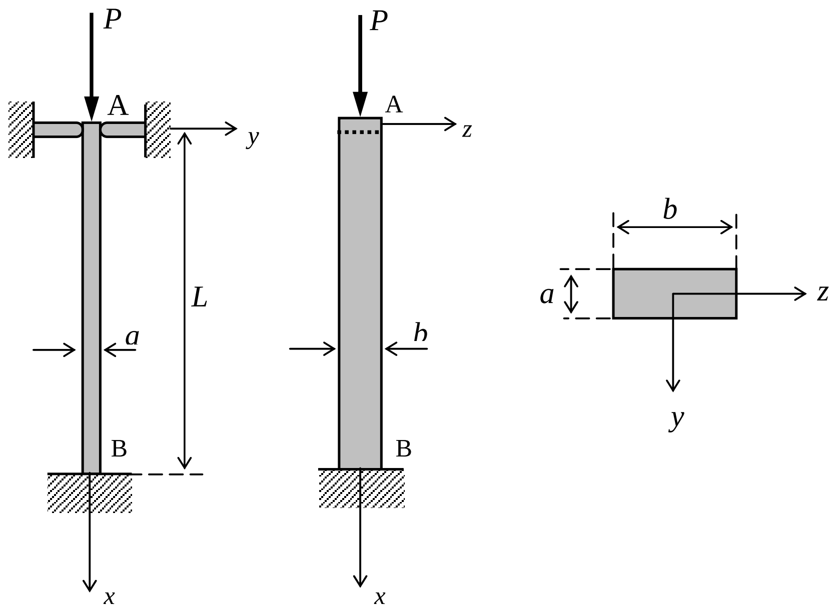
$$= \underline{\underline{\frac{q_0 L^4}{120EI} \left[ \left(\frac{x}{L}\right)^5 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]}}$$

Taivutusmomentti:

$$M = -EIv'' = -\frac{q_0}{6L} x^3 - EIC_1 x - EIC_2 = -\frac{q_0}{6L} x^3 + \frac{3q_0 L}{20} x - \frac{1}{30} q_0 L^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{q_0 L^2}{60} \left[ -10\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 9\frac{x}{L} - 2 \right]}}$$

**5.**




Nurjahdus $x, y-$tasossa:

$l_n = 0,7L$

$$P_{\mathrm{kr}}^{xy} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 E a^3 b}{12\cdot(0,7\cdot L)^2} = \frac{\pi^2\cdot 70\mathrm{kN/mm}^2\cdot(15\mathrm{mm})^3\cdot 35\mathrm{mm}}{12\cdot(0,7\cdot 500\mathrm{mm})^2} \approx \underline{55,52\mathrm{kN}}$$

Nurjahdus $x, z-$tasossa:

$l_n = 2L$

$$P_{\mathrm{kr}}^{xz} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 E a b^3}{12\cdot(2\cdot L)^2} = \frac{\pi^2\cdot 70\mathrm{kN/mm}^2\cdot 15\mathrm{mm}\cdot(35\mathrm{mm})^3}{12\cdot(2\cdot 500\mathrm{mm})^2} \approx \underline{37,03\mathrm{kN}}$$

Sauvan kriittinen kuorma:

$$P_{\mathrm{kr}} = \underline{37,03\mathrm{kN}}$$

Sauvan suurin kuorma:

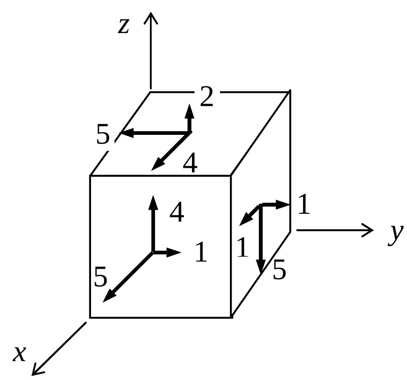
$$P_{\max} = \frac{P_{\mathrm{kr}}}{n} = \frac{37,03\mathrm{kN}}{2,5} = \underline{\underline{14,8\mathrm{kN}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 14.5.2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

1. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila $x, y, z$ -koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla

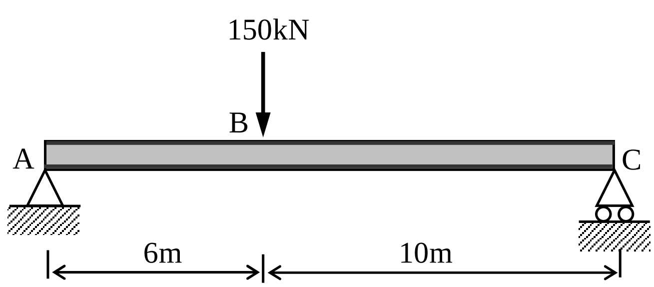


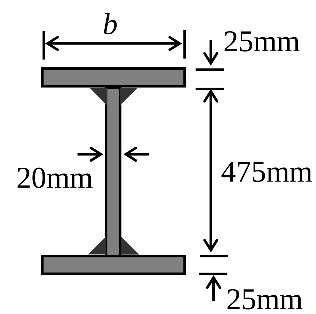

Yksiköt ovat MPa. (a) Määritä jännitysvektori (traktio) $\mathbf{t}^{(n)}$, normaalijännitys $\sigma_n$, normaalijännitysvektori $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$, leikkausjännitysvektori $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$ ja leikkausjännityksen suuruus $\tau^{(n)}$ tasolla, jonka yksikkönormaalivektori on

$$\mathbf{n} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/3.$$

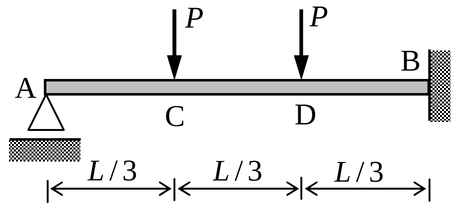
2. Kappaleen siirtymäkenttä on annettu lausekkeilla $u = kxy$, $v = kxy$ ja $w = 2k(x+y)z$, missä vakio $k(>0)$ on niin pieni, että infinitesimaalisten venymien teoria on voimassa. (a) Määritä infinitesimaaliset muodonmuutoskomponentit funktioina koordinaateista $x, y$ ja $z$ ja muodosta muodonmuutosmatriisi. (b) Määritä pisteessä (1,1,0) päävenymät, suurimman päävenymän suuntainen yksikkövektori ja suurin liukuma.

3. Oheinen palkki on muodostettu hitsaamalla kolmesta levystä. Määritä pienin laipan leveys $b$ jota voidaan käyttää , kun $\sigma_{\text{sall}} = 150\text{MPa}$. Hitsin vaikutus poikkileikkauksen jäyhyysmomenttiin voidaan jättää huomiotta.

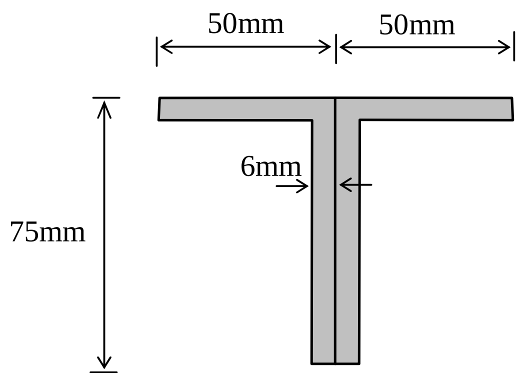


4. Määritä oheisen tasajäykän palkin tukireaktiot sen tuilla A ja B sekä taivutusmomentit pisteissä B, C ja D käyttäen superpositioperiaatetta.



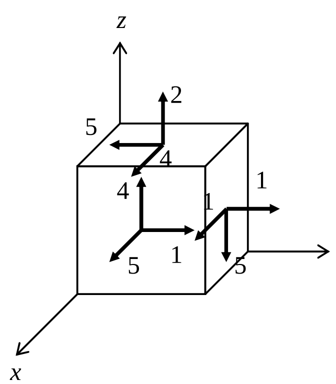

5. Puristussauva on yläpäästään kiinnitetty siten, että se ei pääse siirtymään vaakatasossa, mutta on vapaa kiertymään. Alapäästään se on jäykästi kiinnitetty. Sauvan tehokas pituus on 3m ja se on tehty hitsaamalla yhteen kaksi $75\times 50\times 6$ L-profiilia kuvan mukaisesti. Määritä sauvalle sallittu keskeinen puristava kuorma, kun varmuusluku nurjahduksen suhteen on 3 ja sauvan kimmomoduuli on $E = 200\text{GPa}$.



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 14.5.2007, ratkaisut

**1.**




Jännitysmatriisi:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tason yksikkönormaalivektori: $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}.$

Jännitysvektori: $\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -7/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix}.$

Normaalijännitys: $\sigma_n = \{n\}^T\{t\}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 5 \\ -7/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{3}.$

Normaalijännitysvektori: $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} = -\frac{1}{9}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ .

Leikkausjännitysvektori:

$$\boldsymbol{\tau}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = (5 + \frac{1}{9})\mathbf{i} + (-\frac{7}{3} + \frac{2}{9})\mathbf{j} + (-\frac{2}{3} + \frac{2}{9})\mathbf{k} = \frac{1}{9}(46\mathbf{i} - 19\mathbf{j} - 4\mathbf{k}).$$

Leikkausjännityksen suuruus:

$$\tau^{(n)} = \left|\boldsymbol{\tau}^{(n)}\right| = \sqrt{\boldsymbol{\tau}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(n)}} = \frac{1}{9}\sqrt{46^2 + (-19)^2 + (-4)^2} \approx 5{,}5477 \text{ MPa}$$

**2.**

(a) Muodonmuutoskomponentit:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = ky, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = kx, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 2k(x+y),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = k(x+y), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2kz. \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2kz$$

Muodonmuutosmatriisi:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ky & \frac{k}{2}(x+y) & kz \\ \frac{k}{2}(x+y) & kx & kz \\ kz & kz & 2k(x+y) \end{bmatrix}.$$

(b) Päävenymät pisteessä (1,1,0):

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 4k \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} k-\varepsilon & k & 0 \\ k & k-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 4k-\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ (k-\varepsilon)^2(4k-\varepsilon) - k^2(4k-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \ (4k-\varepsilon)\varepsilon(\varepsilon-2k) = 0 \ \Rightarrow \ \varepsilon_1 = 4k,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_3 = 2k$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon_I = 4k,\ \varepsilon_{II} = 2k,\ \varepsilon_{III} = 0$$

Suurimman päävenymän $\varepsilon_I = 4k$ suuntainen yksikkövektori:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_I & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_I & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} k-4k & k & 0 \\ k & k-4k & 0 \\ 0 & 0 & 4k-4k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \begin{bmatrix} -3k & k & 0 \\ k & -3k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{cases} -3n_x + n_y = 0 \\ n_x - 3n_y = 0 \end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases} n_x = 0 \\ n_y = 0 \end{cases}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \ \Rightarrow \ 2n_z^2 = 1 \ \Rightarrow \ n_z = 1 \ \Rightarrow \ n_x = 0,\ n_y = 0,\ n_z = 1$$

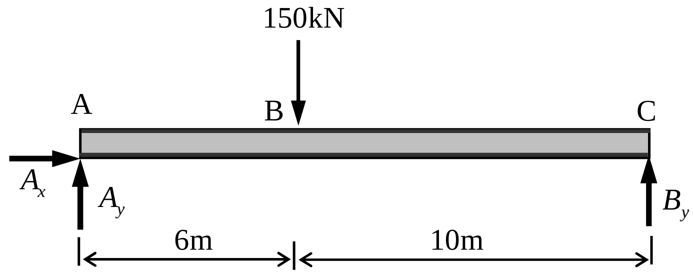
$$\Rightarrow \ \underline{\underline{\mathbf{n} = \mathbf{k}}}$$

Suurin liukuma:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III} = 4k - 0 = \underline{\underline{4k}}$$

**3.**

Tukireaktiot:

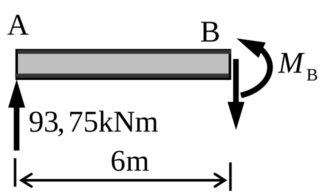



$\rightarrow \quad A_x = 0$

$\overset{\curvearrowleft}{\text{B}} \quad -A_y \cdot 16\text{m} + 150\text{kN} \cdot 10\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \dfrac{375}{4}\text{kN} = 93{,}75\text{kN}$

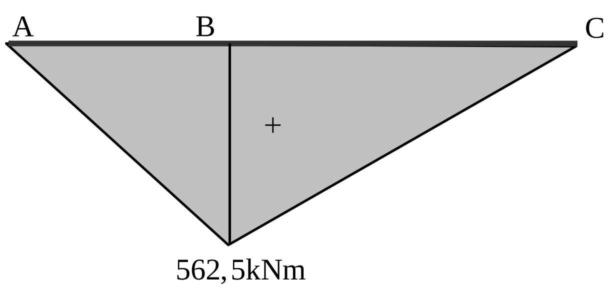
Taivutusmomentti:

$M_\text{A} = M_\text{C} = 0$




$\overset{\curvearrowleft}{\text{A}} \quad M_\text{B} - 93{,}75\text{kN} \cdot 6\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; M_\text{B} = 562{,}5\text{kNm}$

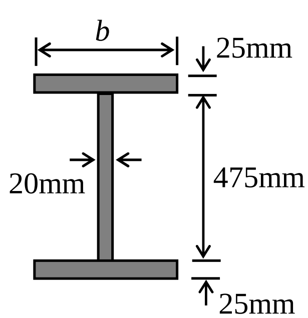
$M-$kuvio:




Suurin taivutusmomentti:

$M_\text{max} = M_\text{B} = 562{,}5\text{kNm}$

Jäyhyysmometti ja taivutusvastus:



$$I = \frac{b \cdot (0,525\text{m})^3}{12} - \frac{(b - 0,02\text{m}) \cdot (0,475\text{m})^3}{12} = 0,0031276\text{m}^3 \cdot b + 0,0001786\text{m}^4,$$

$$W = \frac{I}{0,525\text{m}/2} = 0,011912\text{m}^3 \cdot b - 0,00068038\text{m}^4.$$

Suurin normaalijännitys:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} = \frac{562,5\text{kNm}}{0,011912\text{m}^3 \cdot b - 0,00068038\text{m}^4}$$

Ehto:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{sall}} \;\Rightarrow\; \frac{562,5\text{kNm}}{0,011912\text{m}^3 \cdot b - 0,00068038\text{m}^4} = 150\text{MPa}$$

$$\Rightarrow\; 0,011912\text{m}^3 \cdot b - 0,00068038\text{m}^4 = \frac{562,5\text{kNm}}{150 \cdot 10^3\,\text{kN/m}^2}$$

$$\Rightarrow\; b = \frac{1}{0,011912\text{m}^3}(0,00375 + 0,00068038\text{m}^4) = 0,23171\text{m} \;\approx\; \underline{\underline{232\text{mm}}}$$

**4.**

Käytetään superpositioperiaatetta ja taulukon 8.1 kohtaa 7.

Tukireaktiovoimat:

$$A = A^{\mathrm{C}} + A^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot(2L/3)^2}{2L^2}(2+\frac{L/3}{L}) + \frac{P\cdot(L/3)^2}{2L^2}(2+\frac{2L/3}{L}) = \underline{\underline{\frac{2}{3}P}}$$

$$B = B^{\mathrm{C}} + B^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot L/3}{2L}[3-(\frac{L/3}{L})^2] + \frac{P\cdot 2L/3}{2L}[3-(\frac{2L/3}{L})^2] = \underline{\underline{\frac{4}{3}P}}$$

Tarkistus: $\uparrow\ A + B - 2P = \frac{2}{3}P + \frac{4}{3}P - 2P = 0,$ OK.

Taivutusmomentti $M_{\mathrm{B}}$**:**

$$M_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot L/3\cdot 2L/3}{2L}(\frac{2L/3}{L}-2) + \frac{P\cdot 2L/3\cdot L/3}{2L}(\frac{L/3}{L}-2) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}PL}}$$

Taivutusmomentit $M_{\mathrm{C}}$ ja $M_{\mathrm{D}}$**:**

Taulukon taivutusmomentin lausekkeesta saadaan:

$$M_{\mathrm{C}} = M(\frac{L}{3}) = A\frac{L}{3} - F < \frac{L}{3} - a > = F[\frac{b^2}{6L}(2+\frac{a}{L}) - < \frac{L}{3} - a >]$$

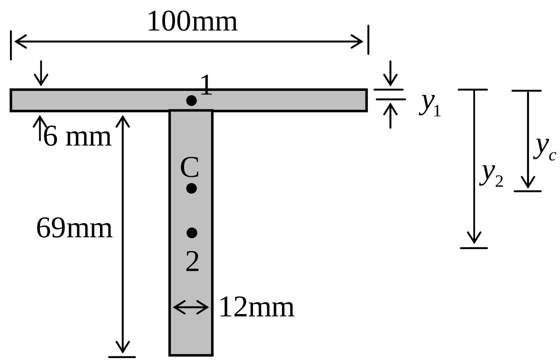
$$M_{\mathrm{D}} = M(\frac{2L}{3}) = A\frac{2L}{3} - F < \frac{2L}{3} - a > = F[\frac{b^2}{3L}(2+\frac{a}{L}) - < \frac{2L}{3} - a >]$$

Soveltamalla näitä lausekkeita saadaan:

$$M_{\mathrm{C}} = M_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} = P[\frac{(2L/3)^2}{6L}(2+\frac{1}{3}) - 0] + P[\frac{(L/3)^2}{6L}(2+\frac{2}{3}) - 0)] = P\frac{2}{9\cdot 3}\frac{7}{3} + P\frac{1}{9\cdot 3}\frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}PL}}$$

$$M_{\mathrm{D}} = M_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}} = P[\frac{(2L/3)^2}{3L}(2+\frac{1}{3}) - (\frac{2L}{3} - \frac{L}{3})] + P[\frac{(L/3)^2}{3L}(2+\frac{2}{3}) - 0] = \underline{\underline{\frac{1}{9}P}}$$

**5.**




$A_1 = 100 \cdot 6 = 600\text{mm}^2$

$A_2 = 69 \cdot 12 = 828\text{mm}^2$

$A = A_1 + A_2 = 1428\text{mm}^2$

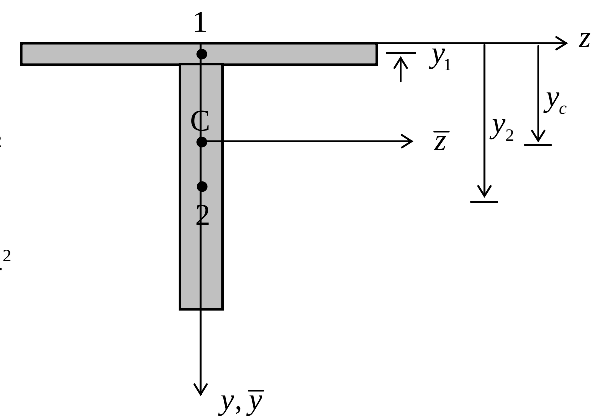
$y_1 = 3\text{mm}$

$y_2 = \dfrac{69}{2} + 6 = 40{,}5\text{mm}$

Pintakeskiö:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{600 \cdot 3 + 828 \cdot 40{,}5}{1428} = 24{,}74\text{mm}$$

Jäyhyysmomentit:




$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2$$
$$= \frac{100 \cdot 6^3}{12} + 600 \cdot 3^2 + \frac{12 \cdot 69^3}{12} + 828 \cdot 40{,}5^2$$
$$= 1{,}693836 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$$
$$I_{\bar{z}} = I_z - A y_c^2 = 1{,}693836 \cdot 10^6 - 1428 \cdot 24{,}74^2$$
$$= \underline{8{,}1980 \cdot 10^5\,\text{mm}^4}$$
$$I_{\bar{y}} = I_y = I_{y1} + I_{y2} = \frac{6 \cdot 100^3}{12} + \frac{69 \cdot 12^3}{12}$$
$$= \underline{5{,}099 \cdot 10^5\,\text{mm}^4}$$

Pienin (pää-)jäyhyysmomentti:

$$I_{\min} = I_{\bar{y}} = 5{,}099 \cdot 10^5\,\text{mm}^4$$

Nurjahduspituus:

$$l_n = 0{,}70 \cdot 3 = 2{,}1\text{m} = 2{,}1 \cdot 10^3\,\text{mm}$$

Kriittinen kuorma:

$$P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3\,\text{N/mm}^2 \cdot 5{,}099 \cdot 10^5\,\text{mm}^4}{(2{,}1 \cdot 10^3\,\text{mm})^2} = 228231{,}8\text{N} = 228{,}2\text{kN}$$

Sallittu kuorma

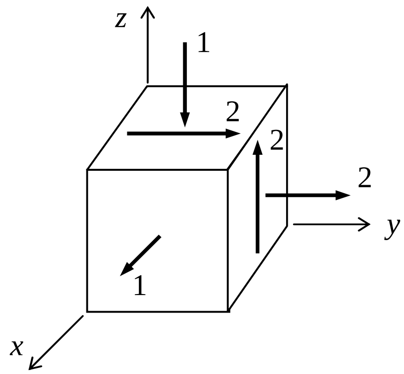
$$P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{228{,}2\text{kN}}{3} = \underline{\underline{76{,}1\text{kN}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

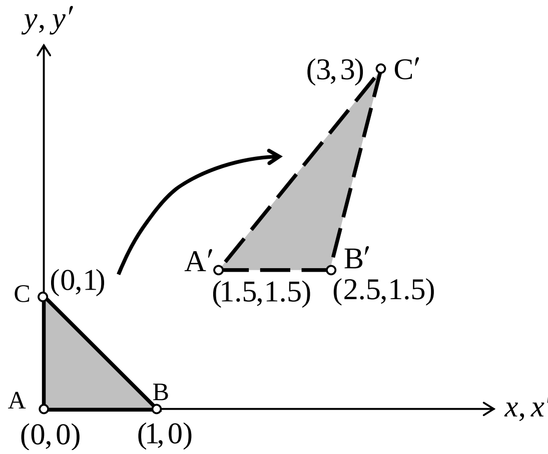
Tentti 17.12.2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

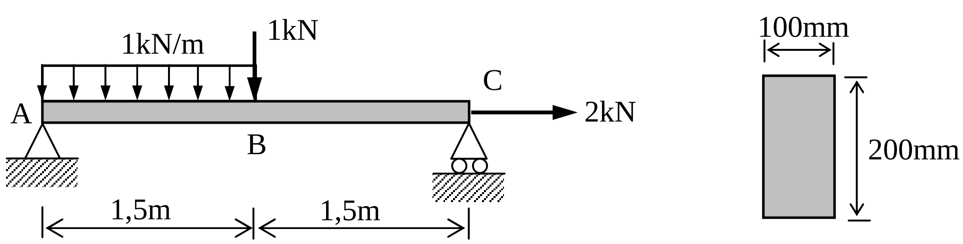
1. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila $x, y, z$ -koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla. Määritä pääjännitykset, suurin leikkausjännitys ja sen pinnan normaalijännitys, jolla suurin leikkausjännitys vaikuttaa. Yksiköt ovat MPa.



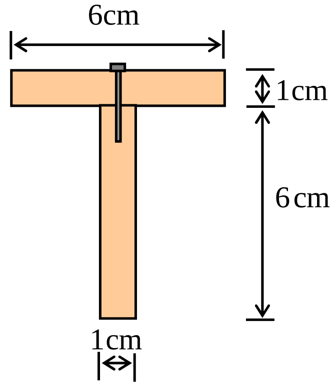

2. Kuvan kolmion muotoinen levy deformoituu siten, että nurkkapisteet A, B ja C siirtyvät pisteisiin A′, B′ ja C′ sekä deformaation geometriakuvaus $x' = x'(x, y)$ ja $y' = y'(x, y)$ kolmion alueella on lineaarinen. Määritä siirtymät $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ sekä Lagrangen venymät $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$ ja liukuma $\gamma_{xy}$




3. Määritä oheisen palkin suurin ja pienin normaalijännitys pisteessä B sijaitsevassa poikkileikkauksessa.

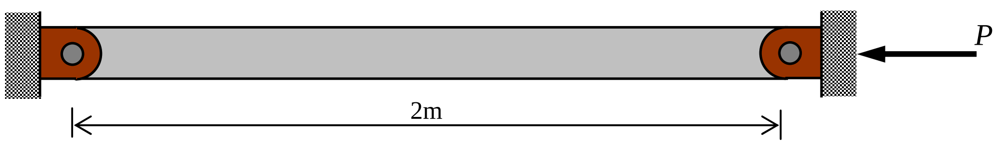


4. Palkki muodostuu kahdesta lankusta, jotka on kiinnitetty toisiinsa nauloilla. Palkin poikkileikkauksessa vaikuttaa 6kN suuruinen leikkausvoima. Määritä tarvittava nauladväli, kun sallittu naulaan kohdistuva leikkausvoima on 2,5kN

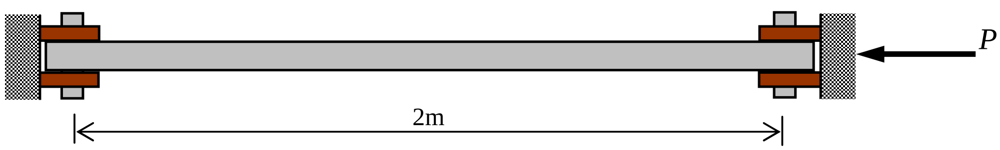



5. Alumiinisauvan AB poikkileikkaus on $20\text{mm}\times 36\text{mm}$ suorakaide ja se on tuettu tapeilla ja korvakkeilla kuvan mukaisesti. Sauvan kumpikin pää voi kiertyä vapaasti tapin läpi kulkevan vaakasuoran akselin ympäri, mutta korvakkeet estävä päiden kiertymisen pystysuoran akselin ympäri. Määritä sallittu keskeinen kuorma *P*, kun varmuusluku nurjahduksen suhteen on 2,5 ja $E = 70\text{GPa}$ .

Sivulta:



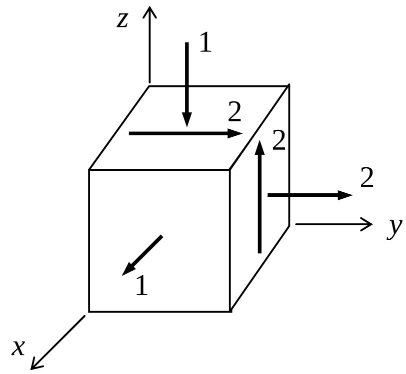

Päältä:



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 17.12.2007, ratkaisut

**1.**




Kuvan perusteella:

$\sigma_x = 1\text{MPa},\ \sigma_y = 2\text{MPa},\ \sigma_z = -1\text{MPa},\ \tau_{xy} = 0,\ \tau_{yz} = 2\text{MPa},\ \tau_{zx} = 0$

$$\Rightarrow\ [\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Jännitysinvariantit:

$I_1 = 1 + 2 - 1 = \underline{\underline{2}},$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 4 - 1 = \underline{\underline{-5}}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = \underline{\underline{-6}}$$

Yhtälö:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \ \Leftrightarrow\ \sigma^3 - 2\sigma^2 - 5\sigma + 6 = 0$$

Ratkaisu:

$$Q = \frac{3I_2 - I_1^2}{9} = \frac{3 \cdot (-5) - 2^2}{9} = -\frac{19}{9}$$

$$R = \frac{2I_1^3 + 27I_3 - 9I_1I_2}{54} = \frac{2 \cdot 2^3 + 27 \cdot (-6) - 9 \cdot 2 \cdot (-5)}{54} = -\frac{28}{27}$$

$$D = Q^3 + R^2 = (-\frac{19}{9})^3 + (-\frac{28}{27})^2 \approx -8{,}33 \le 0\,,$$

$$\varphi = \arccos\frac{R}{\sqrt{-Q^3}} = \arccos\frac{-\frac{28}{27}}{\sqrt{-(-\frac{19}{9})^3}} \approx 109{,}76^\circ$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi) + \frac{I_1}{3} = 2\sqrt{\frac{19}{9}}\cos\frac{109,76°}{3} + \frac{2}{3} \approx 3\text{MPa},$$

$$\sigma_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 120°) + \frac{I_1}{3} \approx -2\text{MPa},$$

$$\sigma_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 240°) + \frac{I_1}{3} \approx 1\text{MPa}.$$

Pääjännitykset:

$$\underline{\underline{\sigma_I = 3\text{MPa},\ \sigma_{II} = 1\text{MPa},\ \sigma_{III} = -2\text{MPa}.}}$$

Suurin leikkausjännitys ja vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{3-(-2)}{2} = \underline{\underline{2,5\text{MPa}}},\ \sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{3+(-2)}{2} = \underline{\underline{0,5\text{MPa}}},$$

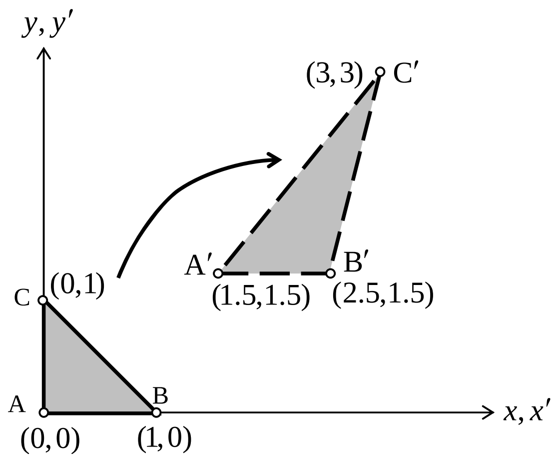
Pääjännitykset saadaan tässä tapauksessa helpommin seuraavasti:

$$\det([\sigma] - \sigma[I]) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sigma & 2 \\ 0 & 2 & -1-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\sigma)\begin{vmatrix} 2-\sigma & 2 \\ 2 & -1-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\sigma)[(2-\sigma)(-1-\sigma) - 4] = 0 \Rightarrow (1-\sigma)(\sigma^2 - \sigma - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6},\ \sigma_3 = 1 \Rightarrow \underline{\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = -2,\ \sigma_3 = 1}$$

**2.**




Esitetään lineaariset lausekkeet $x' = x'(x,y)$ ja $y' = y'(x,y)$ muodossa

$x' = a_1 + a_2 x + a_3 y,$

$y' = b_1 + b_2 x + b_3 y,$

jolloin kuvion perusteella saadaan

$$\left.\begin{aligned} x'(0,0) &= a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 1.5 \\ x'(1,0) &= a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 2.5 \\ x'(0,1) &= a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1.5 \\ 1.5 + a_2 = 2.5 \\ 1.5 + a_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1.5 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1.5 \end{cases}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} y'(0,0) &= b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = 1.5 \\ y'(1,0) &= b_1 + b_2 \cdot 1 + b_3 \cdot 0 = 1.5 \\ y'(0,1) &= b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1.5 \\ 1.5 + b_2 = 1.5 \\ 1.5 + b_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1.5 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 1.5 \end{cases}$$

ja lausekkeiksi $x' = x'(x,y)$ ja $y' = y'(x,y)$ saadaan

$x' = 1.5 + x + 1.5y,$

$y' = 1.5 + 1.5y.$

Siirtymille saadaan

$$u = x' - x = 1.5 + x + 1.5y - x = \underline{\underline{1.5 + 1.5y}},$$

$$v = y' - y = 1.5 + 1.5y - y. = \underline{\underline{1.5 + 0.5y}}.$$

Siirtymien osittaisderivaatoille saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1.5, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.5.$$

Venymille saadaan

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2] = \underline{\underline{0}}$$

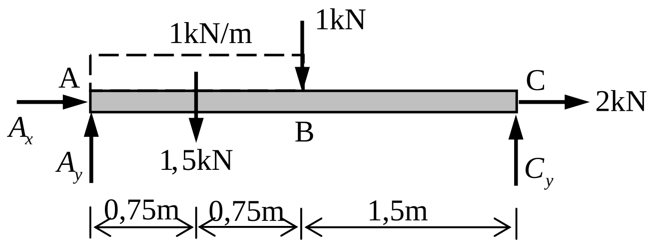
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2] = 0.5 + \frac{1}{2}(1.5^2 + 0.5^2) = 0.5 + \frac{1}{2}(2.25 + 0.25) = \underline{\underline{1.75}}$$

Liukumalle saadaan

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 1.5 + 0 + 0 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0.5 = \underline{\underline{1.5}}$$

**3.**

Tukireaktiot:

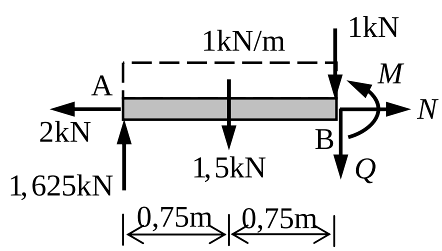



$\rightarrow \quad A_x + 2\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -2\text{kN}$

$\circlearrowleft$ C $\quad -A_y \cdot 3\text{m} + 1{,}5\text{kN} \cdot 2{,}25\text{m} + 1\text{kN} \cdot 1{,}5\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 1{,}625\text{kN}$

$\circlearrowleft$ A $\quad C_y \cdot 3\text{m} - 1{,}5\text{kN} \cdot 0{,}75\text{m} - 1\text{kN} \cdot 1{,}5\text{m} = 0 \quad \Rightarrow\; C_y = 0{,}875\text{kN}$

Taivutusmomentti ja normaalivoima:




$\rightarrow \quad N - 2\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{N = 2\text{kN}}$

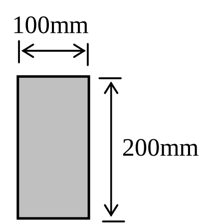
$\circlearrowleft$ B $\quad M - 1{,}625\text{kN} \cdot 1{,}5\text{m} + 1{,}5\text{kN} \cdot 0{,}75\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{M = 1{,}3125\text{kNm}}$

Pinta-ala, jäyhyysmomentti ja taivutusvastus:

$$A = bh = 0{,}1\text{m} \cdot 0{,}2\text{m} = 0{,}02\text{m}^2,$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}1\text{m} \cdot (0{,}2\text{m})^3}{12} = 6{,}67 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^4,$$

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^4}{0{,}1\text{m}} = 6{,}67 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3.$$

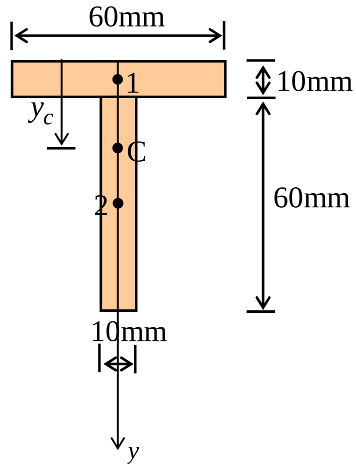



Reunajännitykset:

$$\sigma_{ylä} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{2\text{kN}}{0{,}02\text{m}^2} - \frac{1{,}3125\text{kNm}}{6{,}67 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3} = (100 - 1969)\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \approx \underline{\underline{-1{,}87\text{MPa} = \sigma_{\min}}}$$

$$\sigma_{ala} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = (100 + 1969)\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \approx \underline{\underline{2{,}07\text{MPa} = \sigma_{\max}}}$$

**4.**




Jäyhyysmomentti:

$A_1 = A_2 = 10 \cdot 60 = 600\text{mm}^2,\ A = A_1 + A_2 = 1200\text{mm}^2,$

$y_1 = 5\text{mm},\ y_2 = 40\text{mm}$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{600 \cdot 5 + 600 \cdot 40}{1200} = \underline{22,5\text{mm}}$$

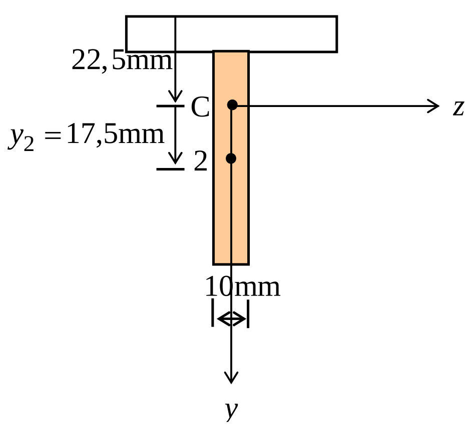
$$I_{\bar{z}1} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} = 5000\text{mm}^4,\ I_{\bar{z}2} = \frac{10 \cdot 60^3}{12} = 180000\text{mm}^4$$

$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}1} + A_2 y_2^2 = 5000 + 600 \cdot 5^2 + 180000 + 600 \cdot 40^2 = 1{,}160 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

$$I_z = I_{\bar{z}} + A y_c^2$$

$$\Rightarrow\ I = I_{\bar{z}} = I_z - A y_c^2 = 1{,}160 \cdot 10^6 - 1200 \cdot 22,5^2 = \underline{\underline{5,525 \cdot 10^5\text{mm}^4}}$$

Uuman 2 staattinen momentti z-akselin suhteen:




$$S = 600 \cdot 17,5 = \underline{10500\text{mm}^3}$$

Leikkausvuo:

$$q = \frac{QS}{I} = \frac{6\text{kN} \cdot 10500\text{mm}^3}{5,525 \cdot 10^5\text{mm}^4} = \underline{0{,}114\text{kN/mm}}$$

Yhteen naulaan kohdistuva leikkausvoima:

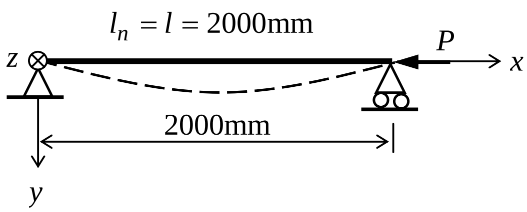
$$Q_{\text{naula}} \equiv q \cdot d = 0{,}114\text{kN/mm} \cdot d$$

Ehto:

$$Q_{\text{naula}} = Q_{\text{naula,sall}}\ \Leftrightarrow\ 0{,}114\text{kN/mm} \cdot d = 2,5\text{kN}\ \Rightarrow\ d = \frac{2,5\text{kN}}{0{,}114\text{kN/mm}} \approx \underline{\underline{21{,}9\text{mm}}}$$

**5.**

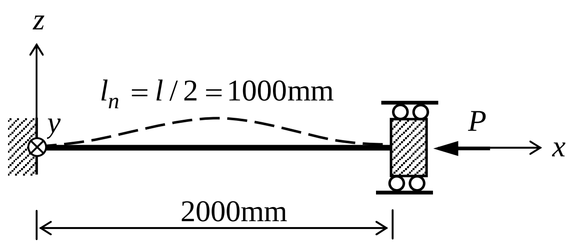
Sivulta:




$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{20\text{mm} \cdot (35\text{mm})^3}{12} = 77760\text{mm}^4$$

$$P_{\text{kr}}^{xy} = \frac{\pi^2 E I_z}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \cdot 77760\text{mm}^4}{(2000\text{mm})^2} = \underline{13,43\text{kN}}$$

Päältä:




$$I_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{(20\text{mm})^3 \cdot 36\text{mm}}{12} = 24000\text{mm}^4$$

$$P_{\text{kr}}^{xz} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \cdot 24000\text{mm}^4}{(1000\text{mm})^2} = \underline{16,58\text{kN}}$$

Kriittinen kuorma:

$$P_{\text{kr}} = \underline{13,43\text{kN}}$$

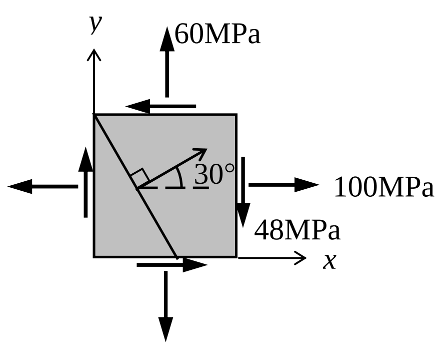
Sallittu kuorma:

$$P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{13,43\text{kN}}{2,5} = \underline{\underline{5,37\text{kN}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Tentti 18.12.2006

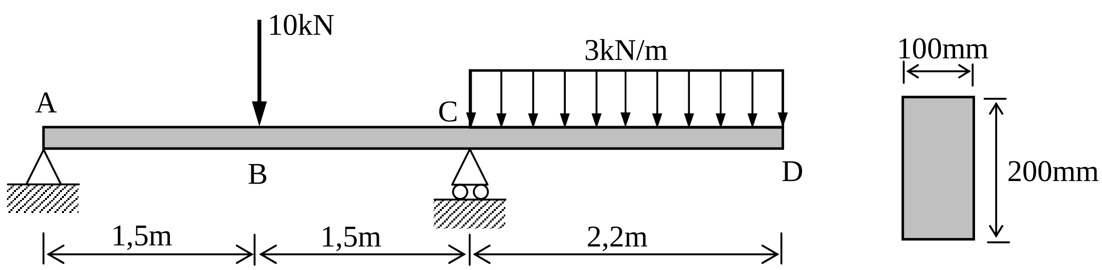
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja opintokirjan numero, myös tarkistuskirjain

1. Määäritä käyttäen Mohrin ympyrää oheisen tasojännitystilan (a) pääjännitykset ja suurimman pääjännityksen suuntakulma sekä (b) normaalijännitys ja leikkausjännitys pinnalla, jonka normaali muodostaa $30°$ kulman (vastapäivään) $x-$akselin suhteen. Huolellisesti piirretystä kuviosta saatu tarkkuus riittää.

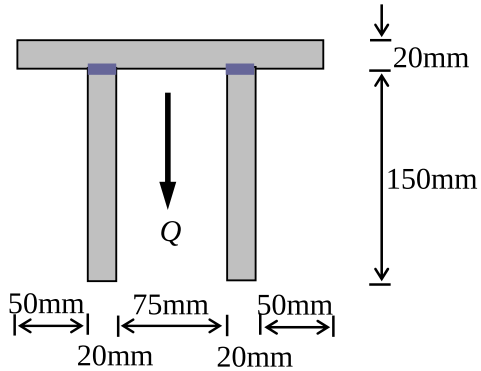



2. Jännityskomponentit pitkässä ympyräsylinterin muotoisessa kappaleessa, jonka säde on $a$ ja $x-$akseli yhtyy sylinterin akseliin ja jota väännetään, ovat
$\tau_{xy} = -G\theta z,\ \tau_{xz} = G\theta y,\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0.$
missä $G$ ja $\theta$ ovat vakioita (leikkausmoduuli ja vääntymä). (a) Osoita, että jännityskomponentit ovat tasapainossa, kun tilavuusvoimia ei ole. (b) Osoita myös, että sylinterin reunapinta on jännityksetön (eli traktiovektori sylinterin reunapinnalla häviää).

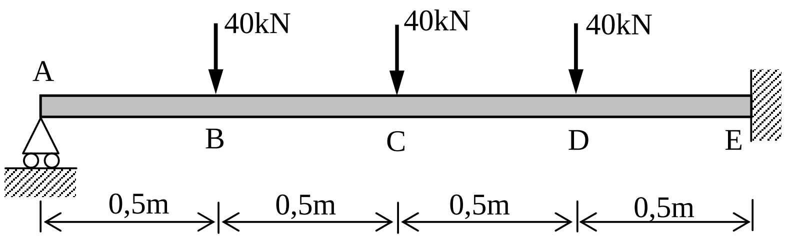
3. Määritä oheisen palkin maksimi normaalijännitys pisteessä C sijaitsevassa poikkileikkauksessa.



4. Kaksois T-palkki on valmistettu hitsaamalla yhteen kolme levyä kuvan mukaisesti. Jos hitsille voidaan sallia leikkausjännitys $\tau_{\text{sall}} = 90\text{MPa}$, määritä kuinka suuri leikkausvoima $Q$ poikkileikkauksessa voi vaikuttaa.



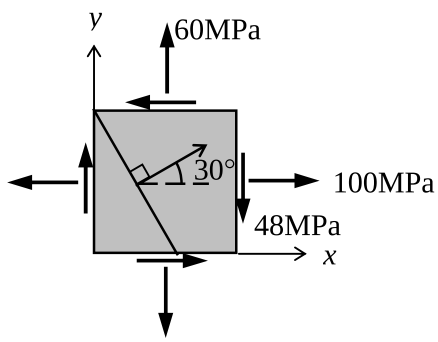

5. Määritä superpositioperiaatetta käyttäen oheisen palkin taipuma pisteessä C ja taivutusmomentti pisteessä E. Poikkileikkauksen jäyhyysmomentti on $I = 45{,}5 \cdot 10^6 \text{mm}^4$ ja kimmomoduuli on $E = 210\text{GPa}$.



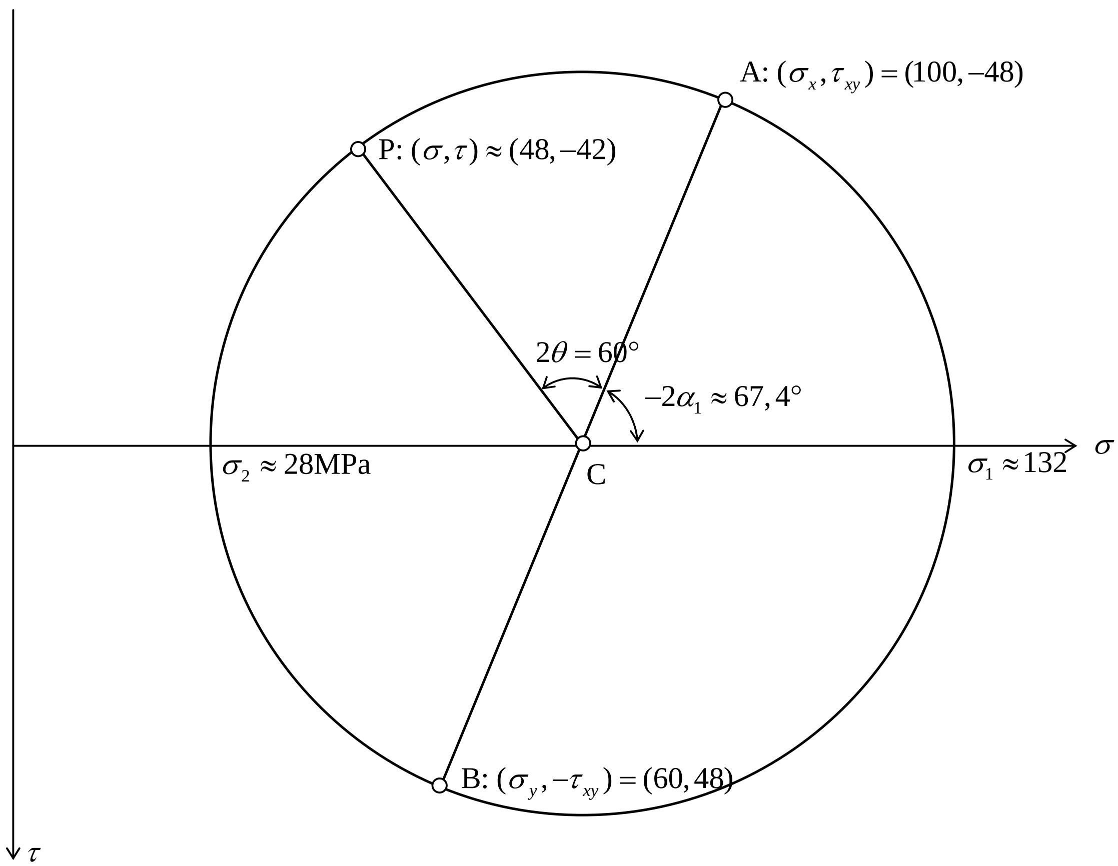
# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 18.12.2006, ratkaisut

**1.**




Jännityskomponentit: $\sigma_x = 100\text{MPa}$ , $\sigma_y = 60\text{MPa}$ ja $\tau_{xy} = -48\text{MPa}$




Kuvion perusteella saadaan:

(a) $\sigma_1 \approx \underline{\underline{132\text{MPa}}}$, $\sigma_2 \approx \underline{\underline{28\text{MPa}}}$, $\alpha_1 \approx -67,4° / 2 = \underline{\underline{-33,7°}}$

(b) $\sigma \approx \underline{\underline{48\text{MPa}}}$, $\tau \approx \underline{\underline{-42\text{MPa}}}$

**2.**

(a) Kun tilavuusvoimaa ei ole, $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ eli $f_x = f_y = f_z = 0$ ja jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt ovat

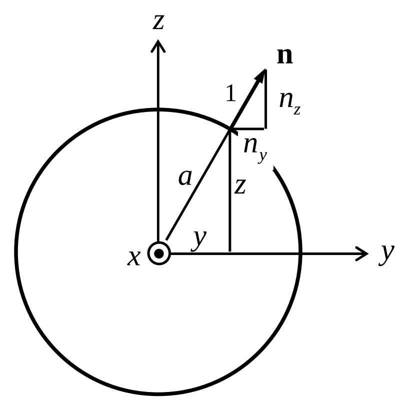
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0\,.$$

Osoitetaan, että ne toteutuvat:

$$\frac{\partial \overbrace{\sigma_x}^{0}}{\partial x}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial y}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial z}=G\theta(-\overbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}^{0}+\overbrace{\frac{\partial y}{\partial z}}^{0})=0,\ \text{OK}$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial x}+\frac{\partial \overbrace{\sigma_y}^{0}}{\partial y}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial z}=-G\theta\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \text{OK}$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial x}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial y}+\frac{\partial \overbrace{\sigma_z}^{0}}{\partial z}=G\theta\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ \text{OK}$$




(b) Sylinteripinnan yksikkönormaalivektorin $\mathbf{n}$ komponentit:

Kuvion perusteella:

$$n_x=0,\quad \frac{n_y}{1}=\frac{y}{a}\ \Rightarrow\ n_y=\frac{y}{a},\quad \frac{n_z}{1}=\frac{z}{a}\ \Rightarrow\ n_z=\frac{z}{a}$$

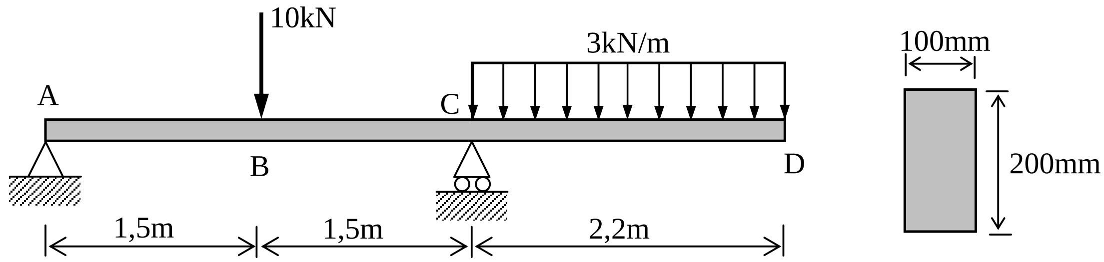
Traktiovektori sylinterim pinnalla:

$$\{t\}^{(n)}=[\sigma]\{n\}\Leftrightarrow$$

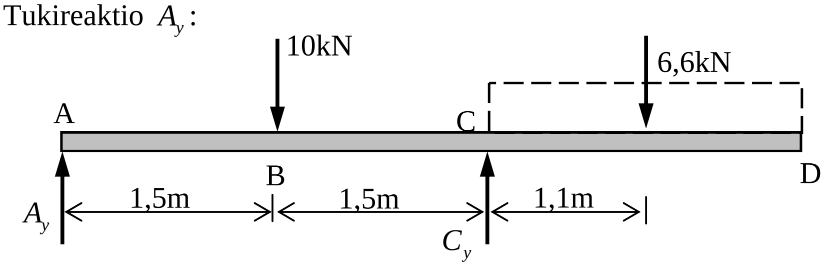
$$\begin{Bmatrix} t_x^{(n)}\\ t_y^{(n)}\\ t_z^{(n)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} n_x\\ n_y\\ n_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -G\theta z & G\theta y\\ -G\theta z & 0 & 0\\ G\theta y & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ y/a\\ z/a\end{Bmatrix}=\frac{G\theta}{a}\begin{Bmatrix}-zy+yz\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{t}^{(n)}=\mathbf{0}}}$$

**3.**

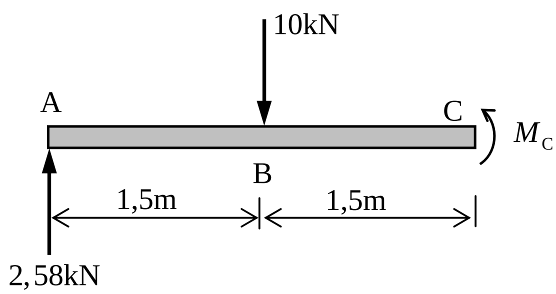



Tukireaktio $A_y$:




$$\text{C} \quad -A_y \cdot 3\text{m} + 10\text{kN} \cdot 1{,}5\text{m} - 6{,}6\text{kN} \cdot 1{,}1\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \underline{2{,}58\text{kN}}$$

Taivutusmomentti pisteessä C:




$$\text{C} \quad -2{,}58\text{kN} \cdot 3\text{m} + 10\text{kN} \cdot 1{,}5\text{m} + M_\text{C} = 0 \;\Rightarrow\; M_\text{C} = \underline{-7{,}26\text{kNm}}$$

Jäyhyysmomentti:

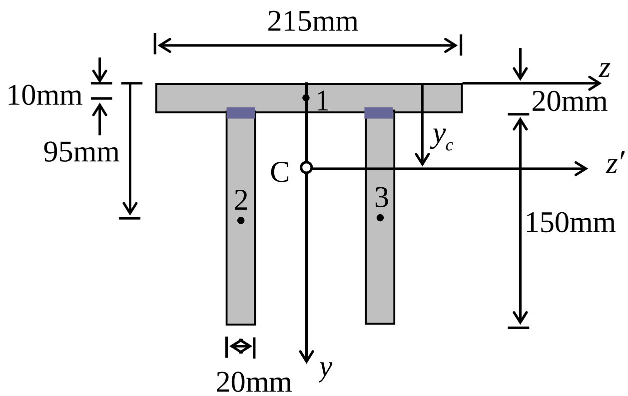
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{100\text{mm} \cdot (200\text{mm})^3}{12} = 66{,}7 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$$

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{66{,}7 \cdot 10^6\,\text{mm}^4}{100\text{mm}} = 0{,}667 \cdot 10^6\,\text{mm}^3$$

Suurin normaalijännitys:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ylä} = -\frac{M}{W} = -\frac{-7{,}26 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{0{,}667 \cdot 10^6\,\text{mm}^3} = \underline{\underline{10{,}9\text{MPa}}}$$

**4.**



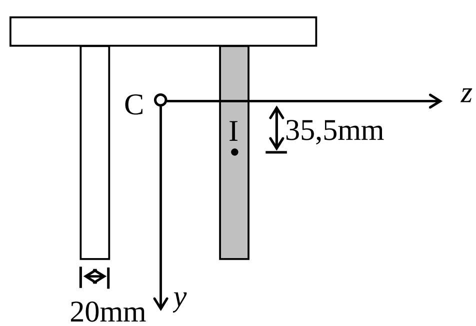

Alat ja pintakeskiö:

$$A_1 = 215\text{mm} \cdot 20\text{mm} = 4300\text{mm}^2,\ A_2 = A_3 = 20\text{mm} \cdot 150\text{mm} = 3000\text{mm}^2$$
$$A = A_1 + 2A_2 = 4300\text{mm}^2 + 2 \cdot 3000\text{mm}^2 = 10300\text{mm}^2$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + 2A_2 y_2}{A} = \frac{4300\text{mm} \cdot 10\text{mm} + 2 \cdot 3000\text{mm} \cdot 95\text{mm}}{10300\text{mm}} \approx 59{,}51\text{mm}$$

Jäyhyysmomentti:

$$\begin{aligned}
I_z &= I_{z'1} + A_1 y_1^2 + 2 \cdot (I_{z'2} + A_2 y_2^2) \\
&= \frac{215\text{mm} \cdot (20\text{mm})^3}{12} + 4300\text{mm}^2 \cdot (10\text{mm})^2 + 2[\frac{20\text{mm} \cdot (150\text{mm})^3}{12} + 3000\text{mm}^2 \cdot (95\text{mm})^2] \\
&= 65{,}97 \cdot 10^6\text{mm}^4 \\
I_z &= I_{z'} + Ay_c^2 \ \Rightarrow\ I_{z'} = I_z - Ay_c^2 = 65{,}97 \cdot 10^6\text{mm}^4 - 10300\text{mm}^2 \cdot (59{,}51\text{mm})^2 \\
&= \underline{29{,}50 \cdot 10^6\text{mm}^4 = I}
\end{aligned}$$




Osan I staattinen momentti:

$$S_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{I}} y_{\mathrm{I}} = 3000\text{mm}^2 \cdot 35{,}5\text{mm} = \underline{106500\text{mm}^3}$$

Leikkausvuo ja leikkausjännitys hitsisaumassa:

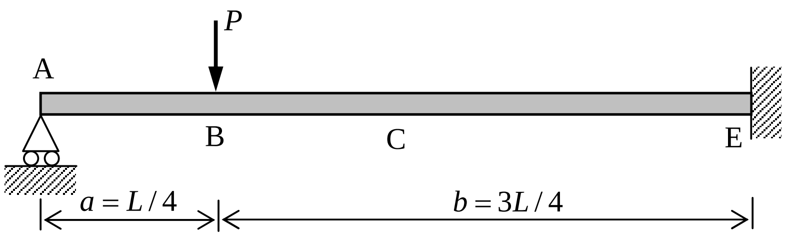
$$q = \frac{QS_\mathrm{I}}{I}, \quad \tau = \frac{q}{b} = \frac{QS_\mathrm{I}}{Ib} = \frac{Q \cdot 0{,}1065 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^3}{29{,}50 \cdot 10^6\mathrm{mm}^4 \cdot 20\mathrm{mm}} = 1{,}805 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mm}^{-2} \cdot Q$$

Ehto:

$$\tau = \tau_\mathrm{sall} \;\Rightarrow\; 1{,}805 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mm}^{-2} \cdot Q = 90\,\mathrm{N/mm}^2 \;\Rightarrow\; Q = \frac{90\mathrm{N}}{1{,}805} \cdot 10^4 = \underline{\underline{498{,}6\mathrm{kN}}}$$

**5.**

Kuormitustapaus (a):

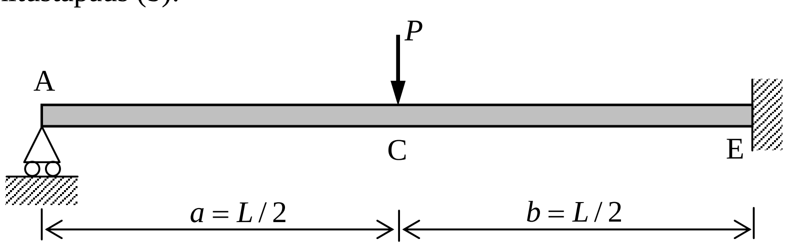



$$v_\mathrm{C}^{(a)} = v(\frac{L}{2}) = \frac{P}{12EI}[3\frac{L}{4}(\frac{3L}{4})^2\frac{1}{2} - (\frac{3}{4}L)^2(2L + \frac{L}{4})(\frac{1}{2})^3 + 2 < \frac{L}{2} - \frac{L}{4} >^3]$$

$$= \underline{\frac{43}{6144}\frac{PL^3}{EI}}$$

$$M_\mathrm{E}^{(a)} = \frac{P\frac{L}{4}\frac{3L}{4}}{2L}(\frac{3}{4} - 2) = \underline{-\frac{15}{128}PL}$$

Kuormitustapaus (b):

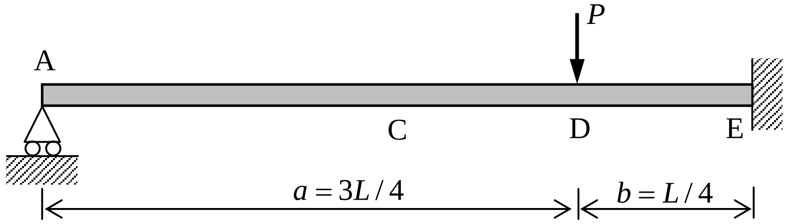


$$v_{\mathrm{C}}^{(b)} = v(\frac{L}{2}) = \frac{P}{12EI}[3\frac{L}{2}(\frac{L}{2})^2\frac{1}{2} - (\frac{L}{2})^2(2L + \frac{L}{2})(\frac{1}{2})^3 + 2 < \frac{L}{2} - \frac{L}{2} >^3]$$

$$= \frac{PL^3}{12EI}(\frac{12}{64} - \frac{5}{64}) = \underline{\frac{7}{768}\frac{PL^3}{EI}}$$

$$M_{\mathrm{E}}^{(b)} = \frac{P\frac{L}{2}\frac{L}{2}}{2L}(\frac{1}{2} - 2) = \underline{-\frac{3}{16}PL}$$

Kuormitustapaus (c):




$$v_{\mathrm{C}}^{(c)} = v(\frac{L}{2}) = \frac{P}{12EI}[3\frac{3L}{4}(\frac{L}{4})^2\frac{1}{2} - (\frac{L}{4})^2(2L + \frac{3L}{4})(\frac{1}{2})^3 + 2 < \frac{L}{2} - \frac{3L}{4} >^3]$$

$$= \frac{PL^3}{12EI}\frac{25}{512} = \underline{\frac{25}{6144}\frac{PL^3}{EI}}$$

$$M_{\mathrm{E}}^{(c)} = \frac{P\frac{3L}{4}\frac{L}{4}}{2L}(\frac{1}{4} - 2) = \underline{-\frac{21}{128}PL}$$

Superpositioperiaate:

$$v_{\mathrm{C}} = v_{\mathrm{C}}^{(a)} + v_{\mathrm{C}}^{(b)} + v_{\mathrm{C}}^{(c)} = \frac{43}{6144}\frac{PL^3}{EI} + \frac{7}{768}\frac{PL^3}{EI} + \frac{25}{6144}\frac{PL^3}{EI} = \frac{31}{1536}\frac{PL^3}{EI}$$

$$M_{\mathrm{E}} = M_{\mathrm{E}}^{(a)} + M_{\mathrm{E}}^{(b)} + M_{\mathrm{E}}^{(c)} = -\frac{15}{128}PL - \frac{3}{16}PL - \frac{21}{128}PL = -\frac{15}{32}PL$$

Sijoittamalla numeroarvot saadaan:

$$v_{\mathrm{C}} = \frac{31}{1536}\frac{PL^3}{EI} = \frac{31}{1536}\frac{40\mathrm{kN}\cdot(2\cdot 10^3\mathrm{mm})^3}{210\mathrm{kN/mm}^2\cdot 45,5\cdot 10^6\mathrm{mm}^4} = \frac{31}{1536}\frac{40\cdot 8\cdot 10^3}{210\cdot 45,5} \approx \underline{\underline{0,676\mathrm{mm}}}$$

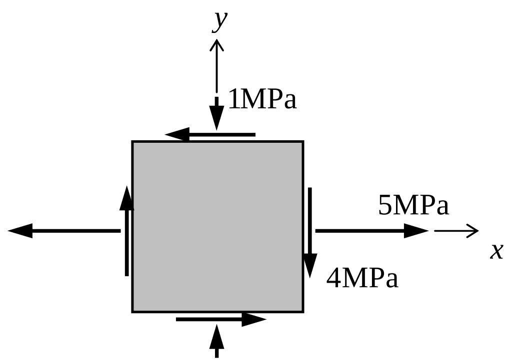
$$M_{\mathrm{E}} = -\frac{6}{16}PL = -\frac{15}{32}\cdot 40\mathrm{kN}\cdot 2\mathrm{m} = \underline{\underline{-37,5\mathrm{kNm}}}$$

## Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

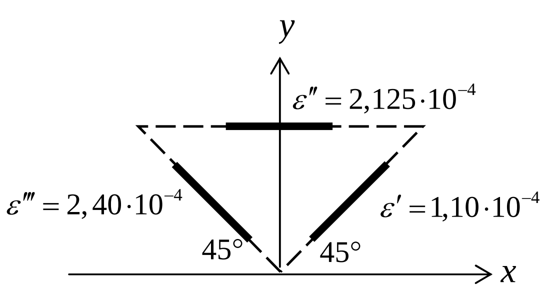
Tentti 21.12.2008

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

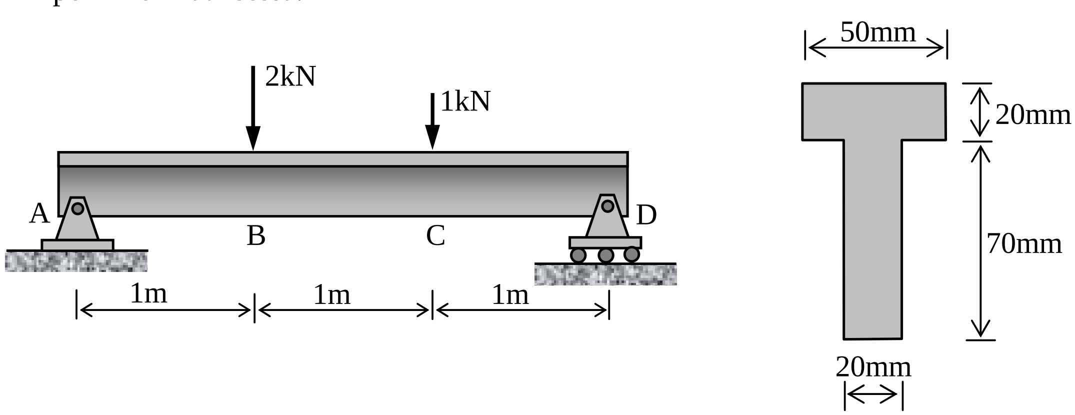
1. Määritä käyttäen tasojännitystilan Mohrin ympyrää pääjännitykset, suurimman pääjännityksen suuntakulma, suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys sekä jännityskomponentit $\sigma'_x$, $\sigma'_y$ ja $\tau'_{xy}$ koordinaatistossa, joka on kiertynyt vastapäivään kulman $\theta = 35°$ kuvan tasojännitystilalle. Yksiköt ovat MPa.



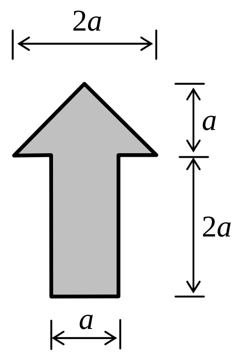

2. Venymämittausruusuke muodostuu kolmesta venymäliuskasta, jotka on kiinnitetty kappaleen pintaan kuvan mukaisesti. Venymäliuskojen venymille $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ ja $\varepsilon'''$ on mitattu kuvan mukaiset arvot. Määritä venymäkomponentit ja venymämatriisi.



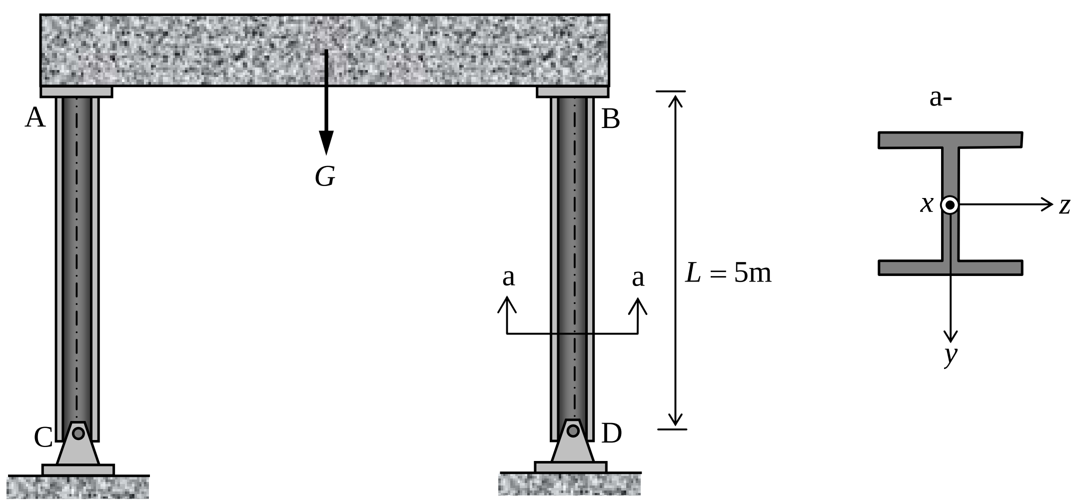

3. Määritä suurin ja pienin normaalijännitys, oheisen palkin pisteessä B olevassa poikkileikkauksessa.



4. Määritä oheisen poikkileikkauksen täysplastinen momentti, kun materiaalin myötöraja on $\sigma_m$.




5. Järeä palkki, joka otaksutaan täysin jäykäksi, tukeutuu kahteen samanlaiseen alumiinipilariin AC ja BD siten, että pilarien yläpäät A ja B kiinnittyvät palkkiin jäykästi ja niiden alapäät C ja D kiinteään alustaan nivelellisesti. Kuinka suuri palkin painovoima $G$ voidaan sallia, kun varmuusluku pilarien nurjahduksen suhteen on 3,0 ja tarkastellaan vain nurjahdusta rakenteen tasossa. Pilarien painovoima voidaan jättää huomiotta. Alumiinin kimmomoduuli on $E = 70\text{GPa}$. Pilarin poikkipinnan jäyhyysmomentille on saatu käsikirjasta arvo $I \equiv I_z = 61{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$.



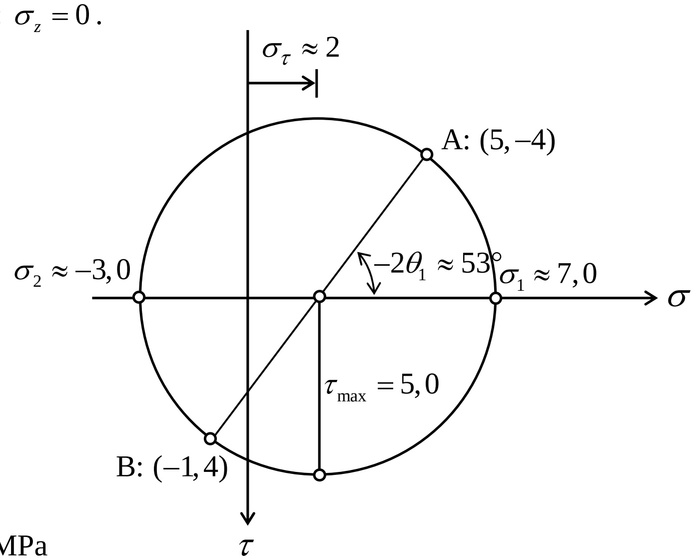
## Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 21.12.2008, ratkaisut

**1.**

Kuvan perusteella: $\sigma_x = 5\text{MPa}$, $\sigma_y = -1\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -4\text{MPa}$.

Koska on tasojännitystila: $\sigma_z = 0$.



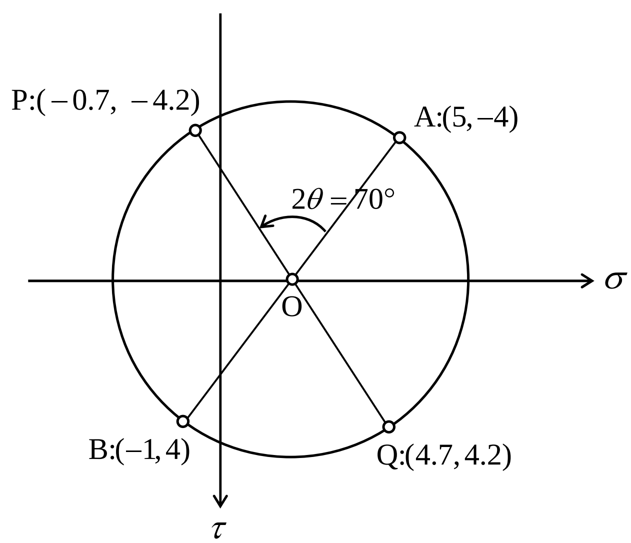

Kuvasta saadaan tulokset:

$\sigma_1 \approx 7,0\text{MPa}$, $\sigma_2 \approx -3,0\text{MPa}$

$\theta_1 \approx -53/2 = \underline{\underline{-26,5°}}$

$\tau_{\max} \approx \underline{\underline{5\text{MPa}}}$, $\sigma_\tau \approx \underline{\underline{2\text{MPa}}}$

Koska $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, $\sigma_I = \underline{\underline{7,0\text{MPa}}}$, $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = \underline{\underline{-3,0\text{MPa}}}$.




Kuvasta saadaan tulokset:

$\sigma'_x = \sigma_P \approx \underline{\underline{-0,7\text{MPa}}}$, $\tau'_{xy} = \tau_P \approx \underline{\underline{-4,2\text{MPa}}}$, $\sigma'_y = \sigma_Q \approx \underline{\underline{4,7\text{MPa}}}$

**2.**

Merkitään venymän suunnan $\mathbf{n}$ ja $x-$ akselin välistä kulmaa $\theta$, jolloin $n_x = \cos\theta$ ja $n_y = \sin\theta$, jolloin

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Venymälle suuntaan $\theta$ saadaan nyt lauseke

$$\varepsilon_\theta \equiv \varepsilon_n = \{n\}^T[\varepsilon]\{n\} = [\cos\theta, \sin\theta] \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$= [\cos\theta, \sin\theta] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \cos\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin\theta \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\cos\theta + \varepsilon_y \sin\theta \end{Bmatrix} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta.$$

Sitä käyttäen saadaan

$$\begin{cases} \varepsilon_{45^\circ} \equiv \varepsilon_x \cos^2 45^\circ + \varepsilon_y \sin^2 45^\circ + \gamma_{xy} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \varepsilon' \\ \varepsilon_{0^\circ} \equiv \varepsilon_x \cos^2 0^\circ + \varepsilon_y \sin^2 0^\circ + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ = \varepsilon'' \\ \varepsilon_{-45^\circ} \equiv \varepsilon_x \cos^2(-45^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(-45^\circ) + \gamma_{xy} \sin(-45^\circ)\cos(-45^\circ) = \varepsilon''' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varepsilon_x + \dfrac{1}{2}\varepsilon_y + \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} = \varepsilon' \\ \varepsilon_x = \varepsilon'' \\ \dfrac{1}{2}\varepsilon_x + \dfrac{1}{2}\varepsilon_y - \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} = \varepsilon''' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy} = 2\varepsilon' \\ \varepsilon_x = \varepsilon'' \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y - \gamma_{xy} = 2\varepsilon''' \end{cases}$$

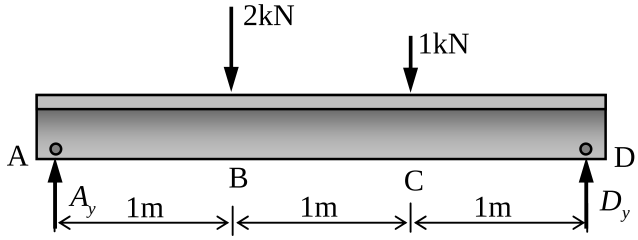
$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon'' = \underline{\underline{2.125 \cdot 10^{-4}}} \\ \varepsilon_y = \varepsilon' - \varepsilon'' + \varepsilon''' = (1.10 - 2.125 + 2.40)\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{1.375 \cdot 10^{-4}}} \\ \gamma_{xy} = \varepsilon' - \varepsilon''' = (1.10 - 2.40)\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{-1.30 \cdot 10^{-4}}} \end{cases}$$

Venymämatriisi:

$$\underline{\underline{[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2.125 & -0.65 \\ -0.65 & 1.375 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}}}$$

**3.**

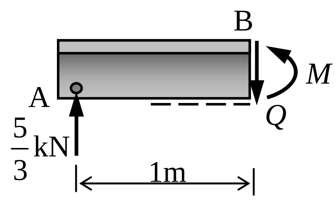
Tukireaktio $A_y$:




$$\text{D} \quad -A_y \cdot 3\text{m} + 2\text{kN}\cdot 2\text{m} + 1\text{kN}\cdot 1 = 0$$

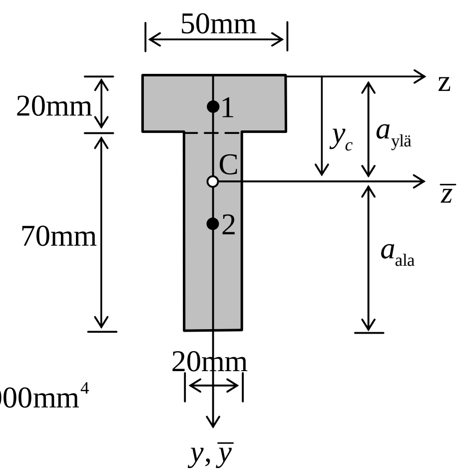
$$\Rightarrow A_y = \frac{5}{3}\text{kN}$$

Taivutusmomentti pisteessä B:




$$\text{B} \quad M - \frac{5}{3}\text{kN}\cdot 1\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; M = \underline{\frac{5}{3}\text{kNm}}$$

Jäyhyysmomentti:




$$A_1 = 50\cdot 20 = 1000\text{mm}^2,\; A_2 = 20\cdot 70 = 1400\text{mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 2400\text{mm}^2$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{1000\cdot 10 + 1400\cdot 55}{2400} = 36,25\text{mm}$$

$$I_z = I_1 + A_1 y_1^2 + I_2 + A_2 y_2^2$$

$$= \frac{50\cdot 20^3}{12} + 1000\cdot 10^2 + \frac{20\cdot 70^3}{12} + 1400\cdot 55^2 = 4940000\text{mm}^4$$

$$I \equiv I_{\bar{z}} = I_z - A y_c^2 = 4940000 - 2400\cdot(36,25)^2 = 1786250\text{mm}^4$$

Taivutusvastukset:

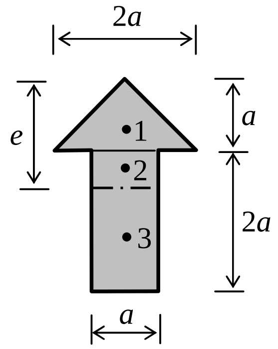
$$W_{\text{ylä}} = \frac{I}{a_{\text{ylä}}} = \frac{1786250}{36,25} = 49275,9\text{mm}^3,\; W_{\text{ylä}} = \frac{I}{a_{\text{ala}}} = \frac{17862500}{90-36,25} = 33232,6\text{mm}^3$$

Suurin ja pienin normaalijännitys:

$$\sigma_{\text{ylä}} = -\frac{M}{W_{\text{ylä}}} = -\frac{5/3\cdot 10^6\,\text{Nmm}}{49275,9\text{mm}^3} = \underline{\underline{-33,82\text{MPa} = \sigma_{\min}}}$$

$$\sigma_{\text{ala}} = \frac{M}{W_{\text{ala}}} = \frac{5/3\cdot 10^6\,\text{Nmm}}{33232,6\text{mm}^3} = \underline{\underline{50,15\text{MPa} = \sigma_{\max}}}$$

**4.**




Alat:

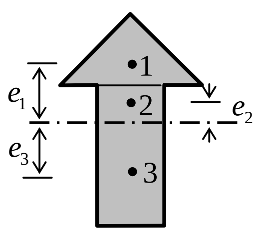
$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2, \; A_2 = a \cdot (e - a), \; A_3 = a \cdot (3a - e).$$

Neutraaliakseli:

$$A_{\text{ylä}} = A_{\text{ala}} \;\Leftrightarrow\; A_1 + A_2 = A_3 \;\Rightarrow\; a^2 + a(e-a) = a(3a-e) \;\Rightarrow\; \underline{e = \frac{3}{2}a}$$

Alat:

$$A_1 = a^2, \; a_2 = \frac{1}{2}a^2, \; a_3 = \frac{3}{2}a^2$$




$$e_1 = e - \frac{2}{3}a = \frac{3}{2}a - \frac{2}{3}a = \frac{5}{6}a$$

$$e_2 = \frac{1}{4}a$$

$$e_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{4}a$$

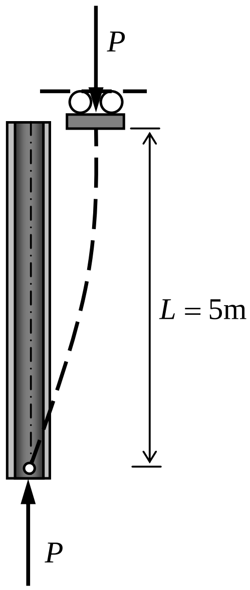
$$W_p = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 = a^2 \cdot \frac{5}{6}a + \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{4}a + \frac{3}{2}a^2 \cdot \frac{3}{4}a = \frac{25}{12}a^3$$

$$M_p = \sigma_m W_p = \underline{\underline{\frac{25}{12}\sigma_m a^3 \approx 2{,}08\sigma_m a^3.}}$$

**5.**

Pilariin kohdistuva voima: $P = G/2$ (symmetria).

Pilarin nurjahduspituus ja jäyhyysmomentti:




$$l_n = 2 \cdot L = 10\text{m}$$
$$I = I_z = 61,3 \cdot 10^{-6}\text{m}^4$$

Pilarin kriittinen kuorma $P_{\text{kr}}$:

$$P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6\,\text{kN/m}^2 \cdot 61,3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4}{(10\text{m})^2} = 423,5\text{kN}$$

Pilarin sallittu kuorma:

$$P_{\text{sall}} = \frac{P_{kr}}{n} = \frac{423,5\text{kN}}{3,0} = 141,2\text{kN}$$

Palkin sallittu painovoima:

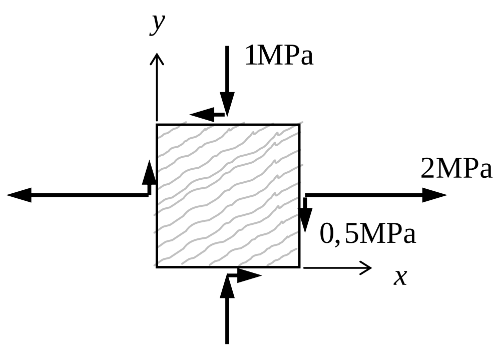
$$G_{\text{sall}} = 2 \cdot P_{\text{sall}} = \underline{\underline{282,3\text{kN}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 30.8.2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

1. Puisen rakenneosan tietyssä pisteessä on kuvan mukainen tasojännitystila. Puun syyt muodostavat $30°$ kulman $x-$akselin kanssa. Sallittu leikkausjännitys syiden suunnassa on $\tau_{\text{sall}} = 1\text{MPa}$. Selvitä Mohrin ympyrän avulla ja analyyttisesti onko tämä jännitystila mahdollinen.




2. Päävenymien määrittäminen tasotapauksessa voidaan ilmaista ominaisarvotehtävänä

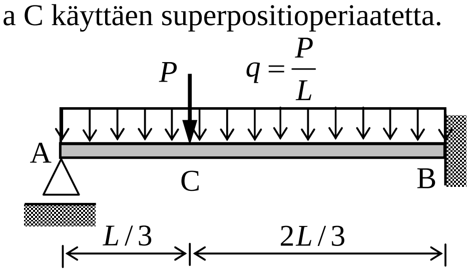
$$([\varepsilon] - \varepsilon[I])\{n\} = \{0\},$$

missä $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}.$

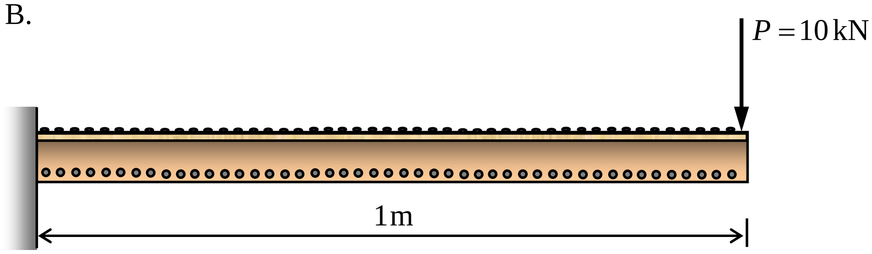
Johda tämän tiedon perusteella päävenymille ja pääsuunnille seuraavat kaavat

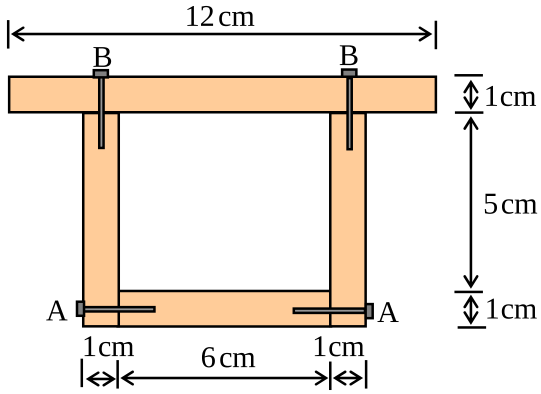
$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}, \quad \theta_i = \arctan\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2}, \ (i = 1, 2).$$

3. Määritä oheisen tasajäykän palkin tukireaktiot sen tuilla A ja B sekä taivutusmomentit pisteissä B ja C käyttäen superpositioperiaatetta.

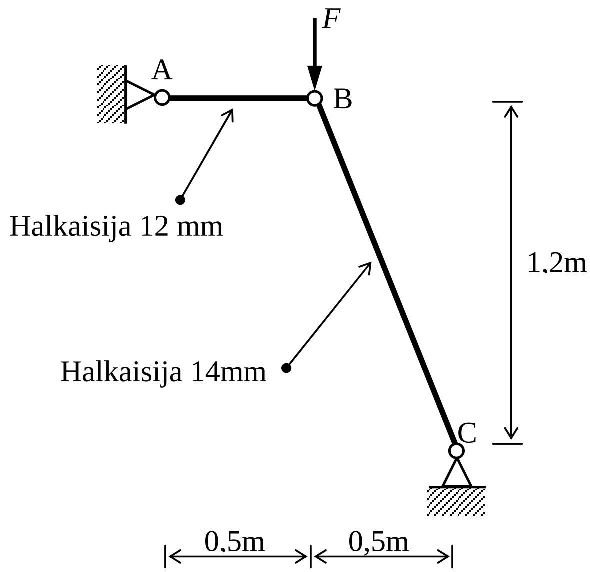


4. Kotelomainen ulokepalkki muodostuu neljästä lankusta, jotka on kiinnitetty toisiinsa nauloilla, jotka sijaitsevat pitkin palkkia 2cm:n välein. Palkkia kuormittaa $P = 10\text{kN}$ suuruinen voima. Määritä leikkausvoima, joka kohdistuu kuhunkin naulaan pisteissä A ja B.




5. Määritä suurin kuorma $F$, joka voi vaikuttaa kuvan kahdesta nivelsauvasta muodostuvaan rakenteeseen, kun tarkastellaan vain nurjahdusta rakenteen tasossa. Kaikkien sauvojen poikkileikkaus on ympyrä, $E = 200\text{GPa}$ ja varmuuskerroin on 2,6.



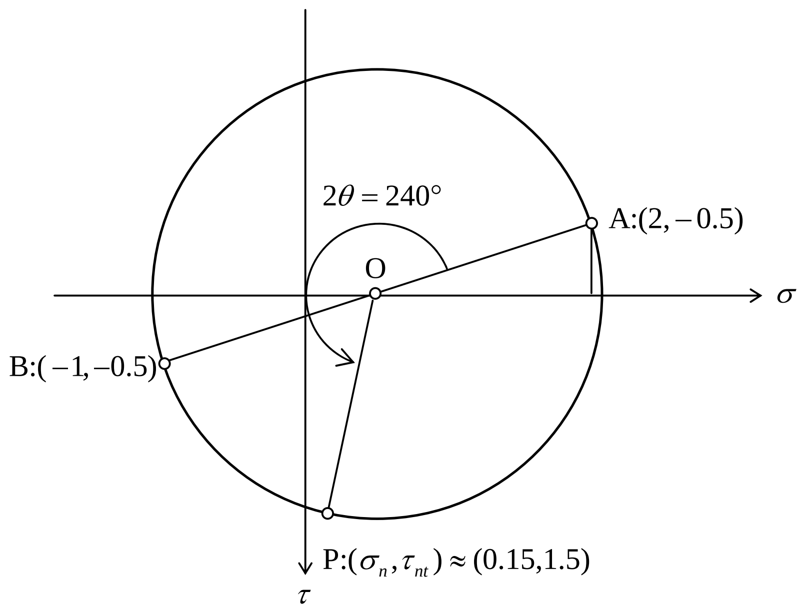
# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 30.8.2007, ratkaisut

**1.**

Jännityskomponentit: $\sigma_x = 2\text{MPa}, \sigma_y = -1\text{MPa}, \tau_{xy} = -0.5\text{MPa}$.
Tarkastelupinnan normaalin ja $x-$ akselin välinen kulma: $\theta = 90° + 30° = 120°$ .

Mohrin ympyrä:




Leikkausjännitys on $\tau_{nt} \approx 1.5\text{MPa} > \tau_{\text{sall}} = 1\text{MPa}$ , joten jännitystila ei ole mahdollinen.

Leikkausjännitykselle saadaan:

$$\tau_{nt} = \{n\}^T[\sigma]\{t\} = [\cos\theta, \sin\theta]\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{Bmatrix} = [\cos\theta, \sin\theta]\begin{Bmatrix}-\sigma_x \sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta \\ -\tau_{xy}\sin\theta + \sigma_y \cos\theta\end{Bmatrix}$$

$$= -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= -[2-(-1)]\sin 120° \cos 120° - 0.5(\cos^2 120° - \sin^2 120°)$$

$$= 1.55\text{MPa} > \tau_{\text{sall}} = 1\text{MPa}$$

**2.**

Päävenymät:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (\varepsilon_x - \varepsilon)(\varepsilon_y - \varepsilon) - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow\; \varepsilon^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon + \varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow\; \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2}{4} - \varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_x{}^2 + \varepsilon_y{}^2 + 2\varepsilon_x\varepsilon_y - 4\varepsilon_x\varepsilon_y + \gamma_{xy}^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_x{}^2 + \varepsilon_y{}^2 - 2\varepsilon_x\varepsilon_y + \gamma_{xy}^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}}}\,.$$

Pääsuunnat:

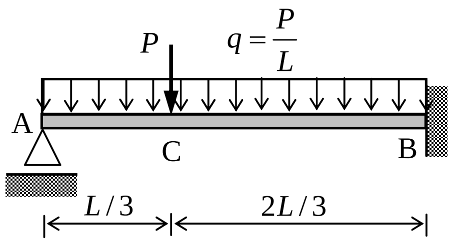
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_i & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \;(i = 1, 2)$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_i)\cos\theta_i + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin\theta_i = 0 \;\Rightarrow\; \tan\theta_i = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2}$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{\theta_i = \arctan\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2},\; (i = 1, 2).}}$$

**3.**




Tukivoimat:

$$A = A_q + A_P = \frac{3}{8}\overbrace{q}^{P/L}L + \frac{P(2L/3)^2}{2L^2}(2+\frac{L/3}{L}) = \frac{3}{8}P + \frac{14}{27}P = \underline{\underline{\frac{193}{216}P}}$$

$$B = B_q + B_P = \frac{5}{8}\overbrace{q}^{P/L}L + \frac{P\cdot L/3}{2L}[3-(\frac{L/3}{L})^2] = \frac{5}{8}P + \frac{13}{27}P = \underline{\underline{\frac{239}{216}P}}$$

Taivutusmomentit:

$$M_{\mathrm{B}q} = -\frac{1}{8}\overbrace{q}^{P/L}L^2 = -\frac{1}{8}PL$$

$$M_{\mathrm{B}P} = \frac{P\cdot L/3\cdot 2L/3}{2L}(\frac{2L/3}{L}-2) = -\frac{4}{27}PL$$

$$M_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{B}q} + M_{\mathrm{B}P} = -(\frac{1}{8}+\frac{4}{27})PL = \underline{\underline{-\frac{59}{216}PL}}$$

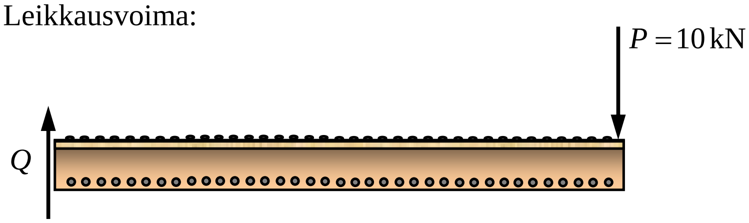
$$M_{\mathrm{C}q} = M_q(\frac{L}{3}) = \frac{1}{8}\overbrace{q}^{P/L}L^2[3\frac{L/3}{L}-4(\frac{L/3}{L})^2] = \frac{5}{72}PL$$

$$M_{\mathrm{C}P} = A\cdot L/3 - P < L/3 - L/3 >= \frac{193}{216}P\cdot\frac{L}{3} - 0 = \frac{193}{648}PL$$

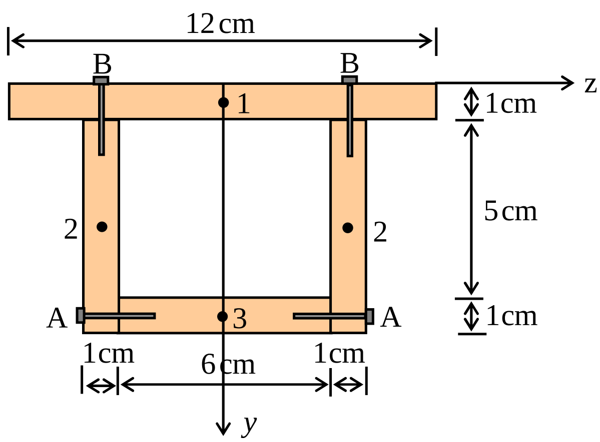
$$M_{\mathrm{C}} = M_{\mathrm{C}q} + M_{\mathrm{C}P} = (\frac{5}{72}+\frac{193}{648})PL = \underline{\underline{\frac{119}{324}PL}}$$

**4.**

Leikkausvoima:




$\uparrow\; Q - 10\,\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; Q = \underline{10\,\text{kN}}$




Pintakeskiö:

$$A_1 = 12\text{cm}^2,\; A_2 = 6\text{cm}^2,\; A_3 = 6\text{cm}^2,\; A = A_1 + 2A_2 + A_3 = 12 + 2\cdot 6 + 6 = 30\text{cm}^2$$
$$y_1 = 0,5\text{cm},\; y_2 = 4\text{cm},\; y_3 = 6,5\text{cm}^2$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + 2A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \underline{3,1\text{cm}}$$

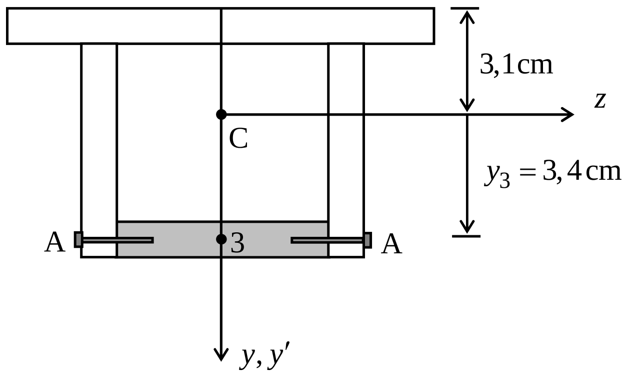
Jäyhyysmomentti z-akselin suhteen:

$$\begin{aligned} I_z &= I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + 2I_{\bar{z}2} + 2A_2 y_2^2 + I_{\bar{z}3} + A_3 y_3^2 \\ &= \frac{12\cdot 1^3}{12} + 12\cdot 0,5^2 + 2\cdot\frac{1\cdot 6^3}{12} + 2\cdot 6\cdot 4^2 + \frac{6\cdot 1^3}{12} + 6\cdot 6,5^2 = 1 + 3 + 36 + 192 + 0,5 + 253,5 \\ &= \underline{486\text{cm}^4} \end{aligned}$$

Jäyhyysmomentti pintakeskiöakselin suhteen:

$$I = I_z = I_{z'} + Ay_c^2 \;\Rightarrow\; I_{z'} = I_z - Ay_c^2 = 486 - 30\cdot 3,1^2 = 197,7\text{cm}^4$$

Leikkausvuo liitoksissa A:



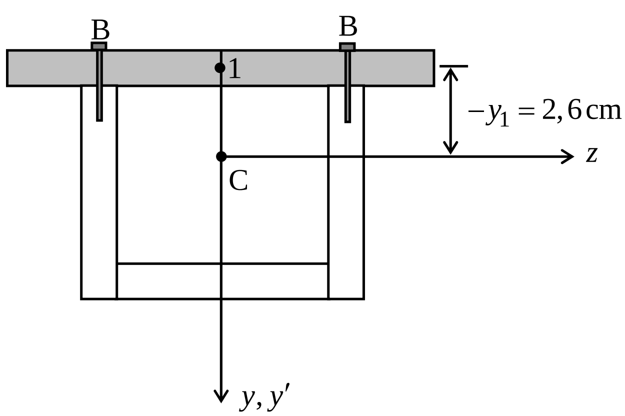

$$S_3 = A_3 y_3 = 6\text{cm}^2 \cdot 3,4\text{cm} = 20,4\text{cm}^3$$

$$q_A = \frac{QS_3}{I} = \frac{10\text{kN} \cdot 20,4\text{cm}^3}{197,7\text{cm}^4} \approx \underline{1,03 \frac{\text{N}}{\text{cm}}}$$

Naulapariin A kohdistuva leikkausvoima: $q_A \cdot 2\text{cm} = 2,06\text{N}$

Yhteen naulaan kohdistuva leikkausvoima: $Q_A = 2,06\text{N}/2 = \underline{\underline{1,03\text{N}}}$

Leikkausvuo liitoksissa B:




$$S_1 = A_1 y_1 = 12\text{cm}^2 \cdot (-2,6\text{cm}) = -31,2\text{cm}^3$$

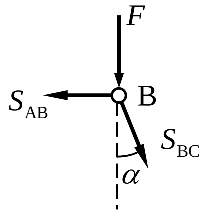
$$q_B = \frac{QS_1}{I} = \frac{10\text{kN} \cdot (-31,2\text{cm}^3)}{197,7\text{cm}^4} \approx \underline{-1,58 \frac{\text{N}}{\text{cm}}}$$

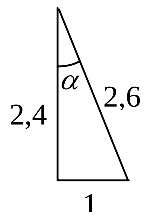
Naulapariin B kohdistuva leikkausvoima: $q_A \cdot 2\text{cm} = -3,16\text{N}$

Yhteen naulaan kohdistuva leikkausvoima: $Q_A = 3,16\text{N}/2 = \underline{\underline{1,58\text{N}}}$

**5.**

<u>Sauvavoimat:</u>




$$\sin\alpha = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13},\ \cos\alpha = \frac{2,4}{2,6} = \frac{12}{13}$$

$$\uparrow \quad -F - S_{BC}\cos\alpha = 0 \ \Rightarrow\ S_{BC} = -\frac{F}{\cos\alpha} = \underline{-\frac{13}{12}F}$$

$$\rightarrow \quad -S_{AB} + S_{BC}\sin\alpha = 0 \ \Rightarrow\ S_{AB} = S_{BC}\sin\alpha = -\frac{13}{12}F\cdot\frac{5}{13} = \underline{-\frac{5}{12}F}$$

<u>Kriittinen kuorma:</u>

Sauvan AB nurjahdus:

$$l_{AB} = 0,5\mathrm{m}\,,\quad I_{AB} = \frac{1}{4}\pi(12\mathrm{mm}/2)^4 = 1017,9\mathrm{mm}^4$$

$$P_{kr}^{AB} = \frac{\pi^2 EI_{AB}}{l_{AB}^2} = \frac{\pi^2\cdot 200\mathrm{kN/mm}^2\cdot 1017,9\mathrm{mm}^4}{(500\mathrm{mm})^2} = 8,04\mathrm{kN}$$

$$P_{kr}^{AB} \equiv 8,04\mathrm{kN} = -S_{AB} = \frac{5}{12}F_{kr}^{AB} \ \Rightarrow\ F_{kr}^{AB} = \frac{12}{5}\cdot 8,04\mathrm{kN} = 19,30\mathrm{kN}$$

Sauvan BC nurjahdus:

$$l_{BC} = \sqrt{(0,5\mathrm{m})^2 + (1,2\mathrm{m})^2} = 1,3\mathrm{m}\,,\quad I_{AB} = \frac{1}{4}\pi(14\mathrm{mm}/2)^4 = 1885,7\mathrm{mm}^4$$

$$P_{kr}^{BC} = \frac{\pi^2 EI_{BC}}{l_{BC}^2} = \frac{\pi^2\cdot 200\mathrm{kN/mm}^2\cdot 1885,7\mathrm{mm}^4}{(1300\mathrm{mm})^2} = 22,02\mathrm{kN}$$

$$P_{kr}^{BC} \equiv 22,02\mathrm{kN} = -S_{BC} = \frac{13}{12}F_{kr}^{BC} \ \Rightarrow\ F_{kr}^{BC} = \frac{12}{13}\cdot 22,02\mathrm{kN} = 20,33\mathrm{kN}$$

Sauva AB nurjahtaa ensin, joten

$$F_{kr} = F_{kr}^{AB} = \underline{19,30\mathrm{kN}}$$

Suurin sallittu kuorma *F*:

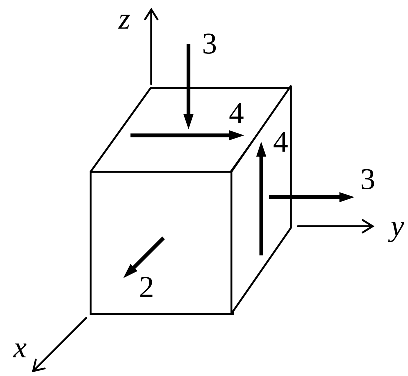
$$F_{sall} = \frac{F_{kr}}{n} = \frac{19,30\mathrm{kN}}{2,6} = \underline{\underline{7,42\mathrm{kN}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 30.10.2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

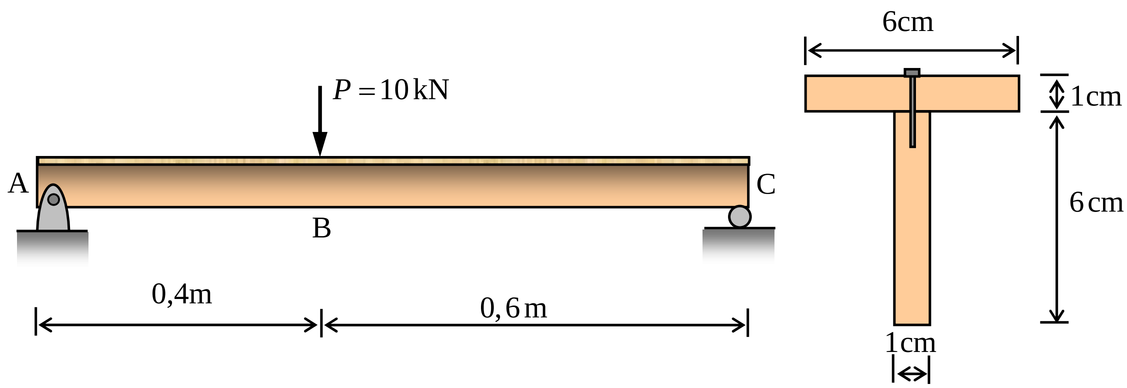
1. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila $x, y, z$ -koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla



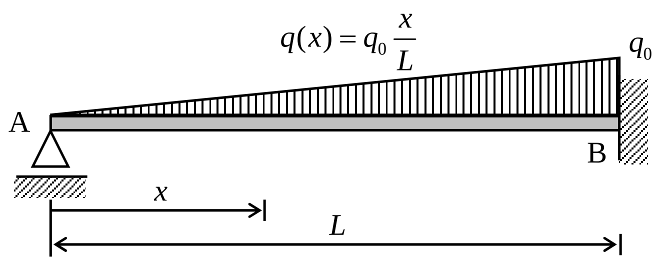

Pääjännitykset tässä pisteessä on määritetty ja ne ovat suuruusjärjestyksessä $\sigma_I = 5$, $\sigma_{II} = 2$, $\sigma_{III} = -5$. Määritä (a) suurimman ja pienimmän pääjännityksen suuntaiset yksikkövektorit $\mathbf{n}_I$ ja $\mathbf{n}_{III}$, (b) suurin leikkausjännitys $\tau_{\max}$ sekä (c) sen pinnan yksikkönormaalivektori $\mathbf{n}_\tau$, jolla suurin leikkausjännitys vaikuttaa. Yksiköt ovat MPa.

2. Millä ehdolla seuraavat infinitesimaaliset venymäkomponentit ovat mahdollisia: $\varepsilon_x = \alpha z(x^2 + y^2)$, $\varepsilon_y = \alpha x^2 z$, $\gamma_{xy} = 2\beta xyz$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_z = 0$.

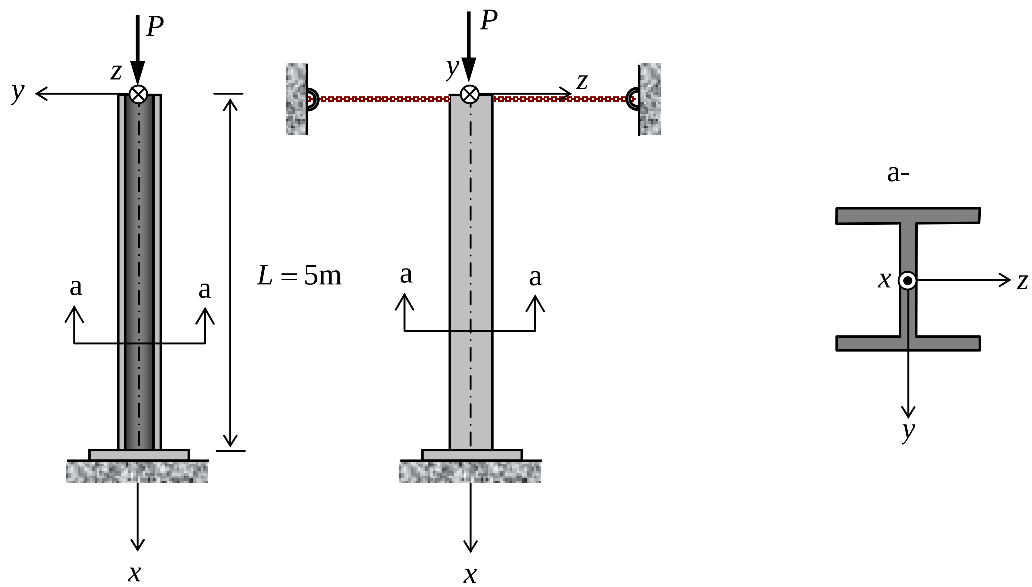
3. Oheinen palkki muodostuu kahdesta lankusta, jotka on kiinnitetty toisiinsa nauloilla, jotka sijaitsevat pitkin palkkia 2cm:n välein. Palkkia kuormittaa $P = 10\text{kN}$ suuruinen voima. Määritä leikkausvoima, joka kohdistuu kuhunkin naulaan välillä AB.




4. Oheista tasajäykkää palkkia, jonka taivutusjäykkyys on $EI$, kuormittaa kolmiokuorma $q(x)$, jonka intensiteetti palkin oikeassa päässä B on $q_0$. Määritä palkin taipuman ja taivutusmomentin lausekkeet ratkaisemalla taipuman differentiaaliyhtälö.




5. Alumiinipilari on alapäästään jäykästi kiinnitetty ja se on tuettu yläpäästään vaijereilla siten, että pään liike $z$-akselin suunnassa on estetty. Määritä suurin mahdollinen kuorma $P$, joka voidaan sallia, kun varmuusluku nurjahduksen suhteen on 3,0. Huomioi nurjahdus sekä $x, y-$ että $x, z-$tasossa. Tarkista lopuksi, että pilari ei myötää kriittisen kuorman alaisena. Käytä seuraavia arvoja: $E = 70\text{GPa}$, $\sigma_m = 215\text{MPa}$, $A = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2$, $I_y = 23{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$ $I_z = 61{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$.



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 30.10.2007, ratkaisut

**1.**

Jännitysmatriisi:

$\sigma_x = 2,\ \sigma_y = 3,\ \sigma_z = -3,\ \tau_{yz} = 4,\ \text{muut} = 0.$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(a)

Suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori:

$([\sigma] - \sigma_I [I])\{n\} = \{0\} \ \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 0 & 3-5 & 4 \\ 0 & 4 & -3-5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ -3n_x = 0 \ \Rightarrow \ n_x = 0,$$

$$-2n_y + 4n_z = 0 \Rightarrow n_y = 2n_z$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ 0^2 + (2n_z)^2 + n_z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \ 5n_z^2 = 1 \ \Rightarrow \ n_z = \frac{1}{\sqrt{5}},\ n_y = 2n_z = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{n}^I = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{j} + \mathbf{k})}}$$

Pienimmän pääjännityksen suuntainen yksikkövektori:

$([\sigma] - \sigma_{III} [I])\{n\} = \{0\} \ \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2+5 & 0 & 0 \\ 0 & 3+5 & 4 \\ 0 & 4 & -3+5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ 7n_x = 0 \ \Rightarrow \ n_x = 0,$$

$$8n_y + 4n_z = 0 \Rightarrow n_y = -\frac{n_z}{2}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ 0^2 + (-\frac{n_z}{2})^2 + n_z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \ \frac{5}{4}n_z^2 = 1 \ \Rightarrow \ n_z = \frac{2}{\sqrt{5}},\ n_y = -\frac{n_z}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

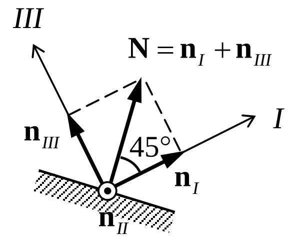
$$\mathbf{n}^{III} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}}$$

(b) Suurin leikkausjännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{5-(-5)}{2} = \underline{\underline{5\text{MPa}}}$$

(c) Pinnan normaali muodostaa $45°$ kulmat pääakselien $I$ ja $III$ kanssa, joten sen suuntainen vektori $\boldsymbol{N}$ (vrt. kuva) on

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}_I + \mathbf{n}_{III} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{j}+\mathbf{k}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$




Sen itseisarvo on

$$|\mathbf{N}| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1^2+3^2} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

Pinnan yksikkönormaalivektori on

$$\mathbf{n}_\tau = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{j}+3\mathbf{k})}}$$

**2.**

Kompatibiliteettiyhtälöiden tulee toteutua. Koska $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_z = 0$, riittää kuin tarkastellaan tasotapauksen kompatibiliteettiyhtälöä.

Derivoidaan

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = 2\alpha yz, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 2\alpha z,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = 2\alpha xy, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\alpha z,$$

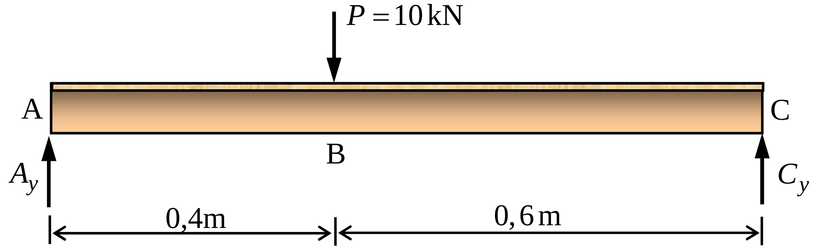
$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = 2\beta yz, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 2\beta z,$$

Sijoitetaan kompatibiliteettiyhtälöön:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \;\Rightarrow\; 2\alpha z + 2\alpha z = 2\beta z \;\Rightarrow\; (2\alpha - \beta)z = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{2\alpha = \beta}}$$

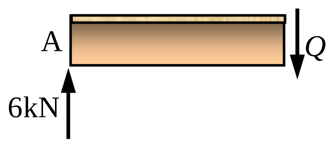
**3.**

Tukireaktio tuella A:



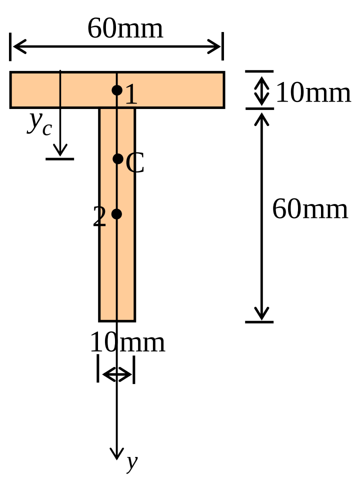

C↻ $A_y \cdot 1\text{m} - 10\text{kN} \cdot 0{,}6\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 6\text{kN}$

Leikkausvoima välillä AB:




$\downarrow\; Q - 6\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q = 6\text{kN}}$

Jäyhyysmomentti:




$A_1 = A_2 = 10 \cdot 60 = 600\text{mm}^2,\; A = A_1 + A_2 = 1200\text{mm}^2,$

$y_1 = 5\text{mm},\; y_2 = 40\text{mm}$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{600 \cdot 5 + 600 \cdot 40}{1200} = \underline{22{,}5\text{mm}}$$

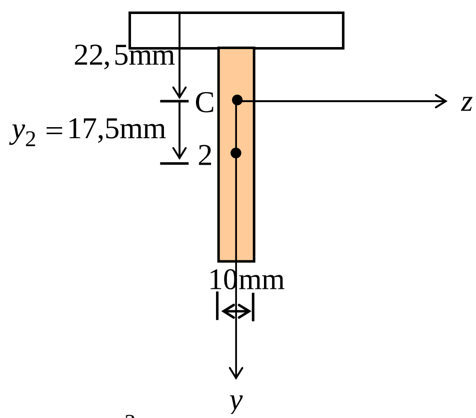
$$I_{\bar{z}1} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} = 5000\text{mm}^4,\; I_{\bar{z}2} = \frac{10 \cdot 60^3}{12} = 180000\text{mm}^4$$

$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}1} + A_2 y_2^2 = 5000 + 600 \cdot 5^2 + 180000 + 600 \cdot 40^2 = 1{,}160 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$$

$$I_z = I_{\bar{z}} + A y_c^2$$

$$\Rightarrow\; I = I_{\bar{z}} = I_z - A y_c^2 = 1{,}160 \cdot 10^6 - 1200 \cdot 22{,}5^2 = \underline{\underline{5{,}525 \cdot 10^5\,\text{mm}^4}}$$

Uuman 2 staattinen momentti z-akselin suhteen:




$S = 600 \cdot 17{,}5 = \underline{10500\text{mm}^3}$

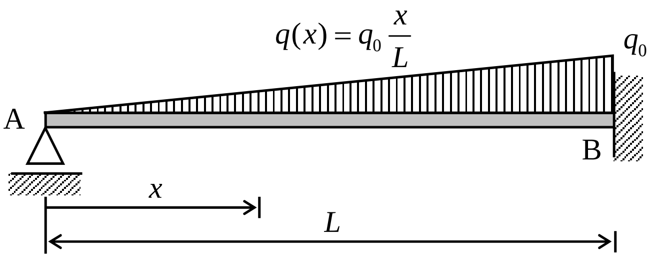
Leikkausvuo:

$$q = \frac{QS}{I} = \frac{6\text{kN} \cdot 10500\text{mm}^3}{5{,}525 \cdot 10^5\,\text{mm}^4} = \underline{0{,}114\text{kN/mm}}$$

Yhteen naulaan kohdistuva leikkausvoima:

$$Q_{\text{naula}} = q \cdot 20\text{mm} = 0{,}114\text{kN/mm} \cdot 20\text{mm} = \underline{\underline{2{,}28\text{kN}}}$$

**4.**




Differentiaaliyhtälön ratkaisu:

$$v^{(4)} = \frac{q_0}{EIL} x \;\Rightarrow\; v''' = \frac{q_0}{2EIL} x^2 + C_1 \;\Rightarrow\; v'' = \frac{q_0}{6EIL} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow\; v' = \frac{q_0}{24EIL} x^4 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \;\Rightarrow\; v = \frac{q_0}{120EIL} x^5 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

Reunaehdot:

$$v(0) \equiv \underline{C_4 = 0},$$

$$M(0) \equiv -EIv''(0) \equiv -EIC_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{C_2 = 0},$$

$$v(L) \equiv \frac{q_0}{120EIL} L^5 + \frac{C_1}{6} L^3 + \frac{C_2}{2} L^2 + C_3 L + C_4 = 0,$$

$$\varphi(L) \equiv \frac{q_0}{24EIL} L^4 + \frac{C_1}{2} L^2 + C_2 L + C_3 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{L^2}{6} C_1 + C_3 &= -\frac{q_0}{120EI} L^3 \\ \frac{L^2}{2} C_1 + C_3 &= -\frac{q_0}{24EI} L^3 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{L^2}{2} C_1 - \frac{L^2}{6} C_1 = -\frac{q_0}{24EI} L^3 + \frac{q_0}{120EI} L^3 \;\Rightarrow\; \frac{L^2}{3} C_1 = -\frac{q_0}{30EI} L^3$$

$$\Rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{q_0 L}{10EI}}, \quad C_3 = -\frac{q_0}{24EI} L^3 - \frac{L^2}{2} C_1 = (-\frac{1}{24} + \frac{1}{20}) \frac{q_0 L^3}{EI} = \underline{\frac{1}{120} \frac{q_0 L^3}{EI}}$$

Taipuma:

$$v = \frac{q_0}{120EIL} x^5 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 = \frac{q_0}{120EIL} x^5 - \frac{q_0 L}{60EI} x^3 + \frac{q_0 L^3}{120EI} x$$

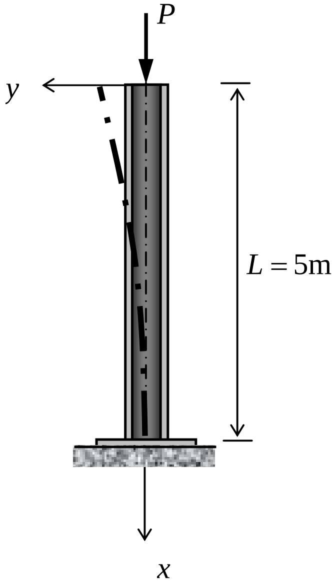
$$= \underline{\underline{\frac{q_0 L^4}{120EI} [(\frac{x}{L})^5 - 2(\frac{x}{L})^3 + \frac{x}{L}]}}$$

Taivutusmomentti:

$$M = -EIv'' = -\frac{q_0 L^4}{120} [20(\frac{x}{L})^2 - 12 \frac{x}{L}] = \underline{\underline{\frac{q_0 L^2}{30} [-5(\frac{x}{L})^3 + 3 \frac{x}{L}]}}$$

**5.**

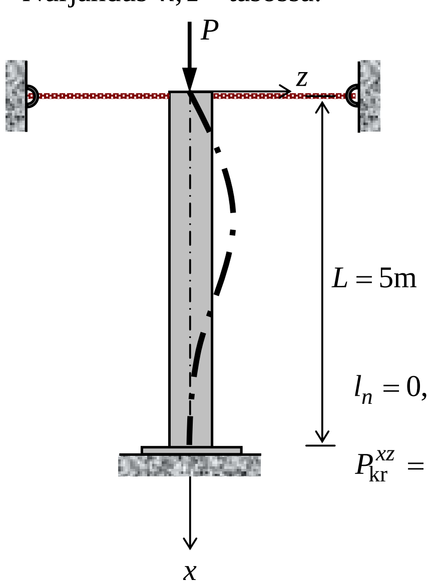
Nurjahdus $x, y-$tasossa:




$$l_n = 2L = 10\text{m}$$

$$P_{\text{kr}}^{xy} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6\,\text{kPa} \cdot 61{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4}{(10\text{m})^2} = 423{,}5\text{kN}$$

Nurjahdus $x, z-$tasossa:




$$l_n = 0{,}70 \cdot L = 3{,}5\text{m}$$

$$P_{\text{kr}}^{xz} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6\,\text{kPa} \cdot 23{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4}{(3{,}5\text{m})^2} = 1308\text{kN}$$

Kriittinen kuorma:

$$P_{\text{kr}} = \min\{P_{\text{kr}}^{xy}, P_{\text{kr}}^{xz}\} = 423{,}5\text{kN}$$

Sallittu kuorma:

$$P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{423{,}5\text{kN}}{3{,}0} = \underline{\underline{141{,}2\text{kN}}}$$

Normaalijännitys:

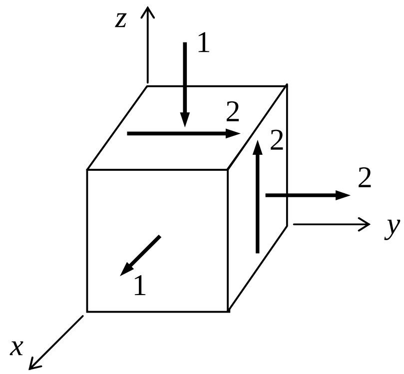
$$\sigma = -\frac{P_{\text{kr}}}{A} = -\frac{423{,}5\text{kN}}{7{,}5 \cdot 10^{-3}\text{m}^2} = -56500\text{kPa} = \underline{\underline{-56{,}5\text{MPa} > -230\text{MPa} = -\sigma_m,\ \text{OK}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 11.3.2008

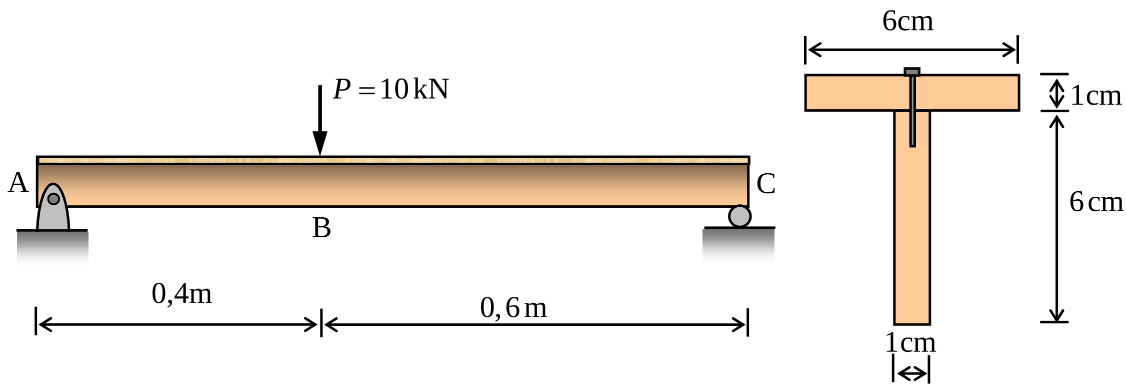
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

1. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila $x, y, z$-koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla. Määritä pääjännitykset, suurin leikkausjännitys ja sen pinnan normaalijännitys, jolla suurin leikkausjännitys vaikuttaa. Yksiköt ovat MPa.

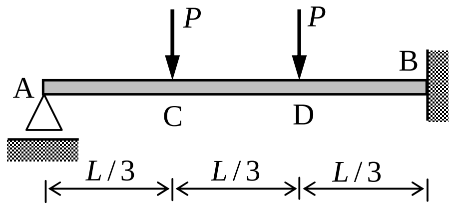



2. Jännityskomponentit pitkässä ympyräsylinterin muotoisessa kappaleessa, jonka säde on $a$ ja $x$ – akseli yhtyy sylinterin akseliin ja jota väännetään, ovat
$\tau_{xy} = -G\theta z,\ \tau_{xz} = G\theta y,\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0.$
missä $G$ ja $\theta$ ovat vakioita (leikkausmoduuli ja vääntymä). (a) Osoita, että jännityskomponentit ovat tasapainossa, kun tilavuusvoimia ei ole. (b) Osoita myös, että sylinterin reunapinta on jännityksetön (eli traktiovektori sylinterin reunapinnalla häviää).

3. Oheinen palkki muodostuu kahdesta lankusta, jotka on kiinnitetty toisiinsa nauloilla, jotka sijaitsevat pitkin palkkia 2cm:n välein. Palkkia kuormittaa $P = 10\text{kN}$ suuruinen voima. Määritä leikkausvoima, joka kohdistuu kuhunkin naulaan välillä AB.

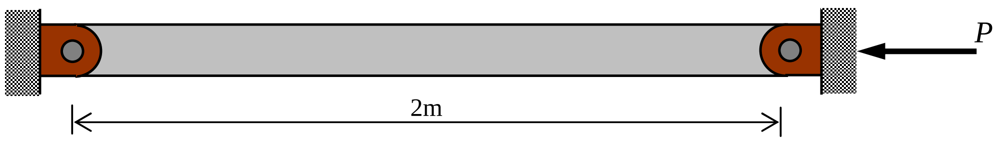


4. Määritä oheisen tasajäykän palkin tukireaktiot sen tuilla A ja B sekä taivutusmomentit pisteissä B, C ja D käyttäen superpositioperiaatetta.

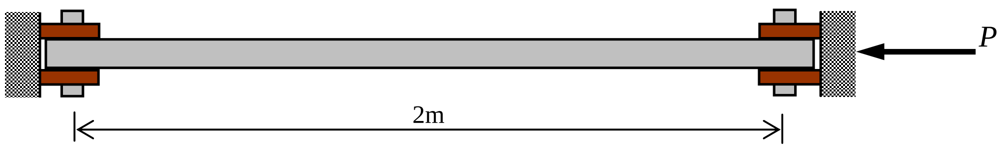



5. Alumiinisauvan AB poikkileikkaus on $20\text{mm} \times 36\text{mm}$ suorakaide ja se on tuettu tapeilla ja korvakkeilla kuvan mukaisesti. Sauvan kumpikin pää voi kiertyä vapaasti tapin läpi kulkevan vaakasuoran akselin ympäri, mutta korvakkeet estävä päiden kiertymisen pystysuoran akselin ympäri. Määritä sallittu keskeinen kuorma $P$, kun varmuusluku nurjahduksen suhteen on 2,5 ja $E = 70\text{GPa}$ .

Sivulta:



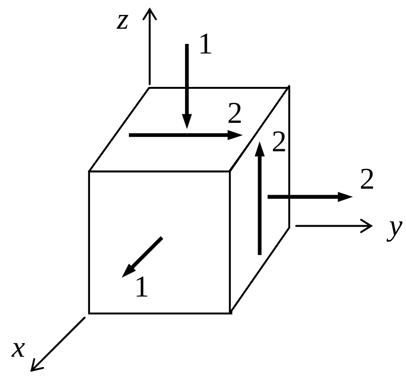

Päältä:



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 11.3.2008, ratkaisut

**1.**




Kuvan perusteella:

$\sigma_x = 1\text{MPa},\ \sigma_y = 2\text{MPa},\ \sigma_z = -1\text{MPa},\ \tau_{xy} = 0,\ \tau_{yz} = 2\text{MPa},\ \tau_{zx} = 0$

$$\Rightarrow\ [\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Jännitysinvariantit:

$I_1 = 1 + 2 - 1 = \underline{\underline{2}},$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 4 - 1 = \underline{\underline{-5}}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = \underline{\underline{-6}}$$

Yhtälö:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \ \Leftrightarrow\ \sigma^3 - 2\sigma^2 - 5\sigma + 6 = 0$$

Ratkaisu:

$$Q = \frac{3I_2 - I_1^2}{9} = \frac{3 \cdot (-5) - 2^2}{9} = -\frac{19}{9}$$

$$R = \frac{2I_1^3 + 27I_3 - 9I_1I_2}{54} = \frac{2 \cdot 2^3 + 27 \cdot (-6) - 9 \cdot 2 \cdot (-5)}{54} = -\frac{28}{27}$$

$$D = Q^3 + R^2 = (-\frac{19}{9})^3 + (-\frac{28}{27})^2 \approx -8,33 \le 0,$$

$$\varphi = \arccos\frac{R}{\sqrt{-Q^3}} = \arccos\frac{-\frac{28}{27}}{\sqrt{-(-\frac{19}{9})^3}} \approx 109,76°$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi) + \frac{I_1}{3} = 2\sqrt{\frac{19}{9}}\cos\frac{109,76°}{3} + \frac{2}{3} \approx 3\text{MPa},$$

$$\sigma_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 120°) + \frac{I_1}{3} \approx -2\text{MPa},$$

$$\sigma_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 240°) + \frac{I_1}{3} \approx 1\text{MPa}.$$

Pääjännitykset:

$$\underline{\underline{\sigma_I = 3\text{MPa},\ \sigma_{II} = 1\text{MPa},\ \sigma_{III} = -2\text{MPa}.}}$$

Suurin leikkausjännitys ja vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{3-(-2)}{2} = \underline{\underline{2,5\text{MPa}}},\ \sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{3+(-2)}{2} = \underline{\underline{0,5\text{MPa}}},$$

Pääjännitykset saadaan tässä tapauksessa helpommin seuraavasti:

$$\det([\sigma] - \sigma[I]) = 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix} 1-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sigma & 2 \\ 0 & 2 & -1-\sigma \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ (1-\sigma)\begin{vmatrix} 2-\sigma & 2 \\ 2 & -1-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\ (1-\sigma)[(2-\sigma)(-1-\sigma) - 4] = 0 \ \Rightarrow\ (1-\sigma)(\sigma^2 - \sigma - 6) = 0$$

$$\Rightarrow\ \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6},\ \sigma_3 = 1 \ \Rightarrow\ \underline{\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = -2,\ \sigma_3 = 1}$$

**2.**

(a) Kun tilavuusvoimaa ei ole, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ eli $f_x = f_y = f_z = 0$ ja jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt ovat

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \,.$$

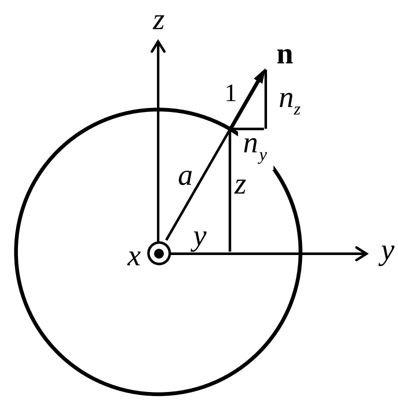
Osoitetaan, että ne toteutuvat:

$$\frac{\partial \overbrace{\sigma_x}^{0}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial z} = G\theta(-\overbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}^{0} + \overbrace{\frac{\partial y}{\partial z}}^{0}) = 0, \text{ OK}$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_y}^{0}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial z} = -G\theta \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ OK}$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_z}^{0}}{\partial z} = G\theta \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \text{ OK}$$

(b) Sylinteripinnan yksikkönormaalivektorin $\mathbf{n}$ komponentit:




Kuvion perusteella:

$$n_x = 0, \quad \frac{n_y}{1} = \frac{y}{a} \;\Rightarrow\; n_y = \frac{y}{a}, \quad \frac{n_z}{1} = \frac{z}{a} \;\Rightarrow\; n_z = \frac{z}{a}$$

Traktiovektori sylinterim pinnalla:

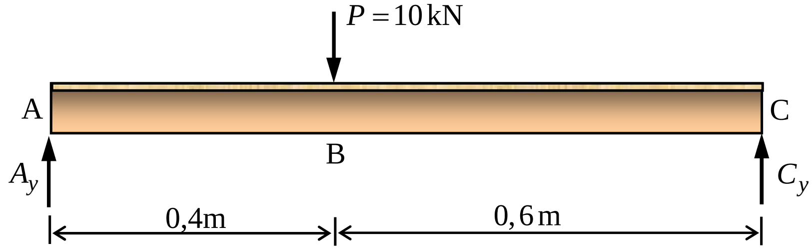
$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -G\theta z & G\theta y \\ -G\theta z & 0 & 0 \\ G\theta y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y/a \\ z/a \end{Bmatrix} = \frac{G\theta}{a} \begin{Bmatrix} -zy + yz \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{0}}}$$

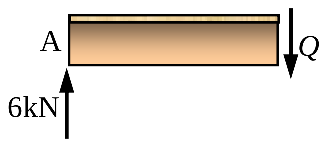
**3.**

Tukireaktio tuella A:



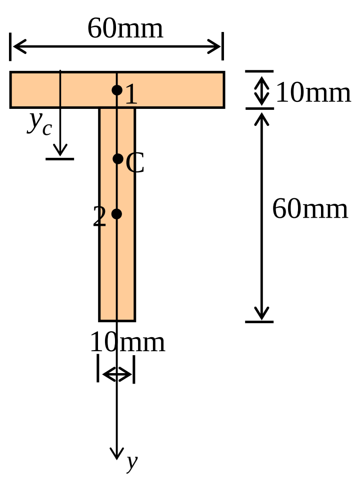

$$\text{C} \circlearrowright\ A_y \cdot 1\mathrm{m} - 10\mathrm{kN} \cdot 0{,}6\mathrm{m} = 0 \ \Rightarrow\ A_y = 6\mathrm{kN}$$

Leikkausvoima välillä AB:




$$\downarrow\ Q - 6\mathrm{kN} = 0 \ \Rightarrow\ \underline{Q = 6\mathrm{kN}}$$

Jäyhyysmomentti:




$$A_1 = A_2 = 10 \cdot 60 = 600\mathrm{mm}^2,\ A = A_1 + A_2 = 1200\mathrm{mm}^2,$$

$$y_1 = 5\mathrm{mm},\ y_2 = 40\mathrm{mm}$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{600 \cdot 5 + 600 \cdot 40}{1200} = \underline{22{,}5\mathrm{mm}}$$

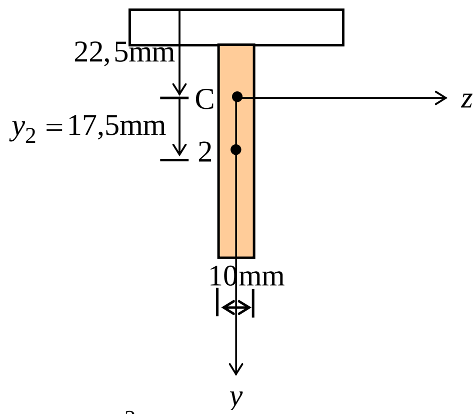
$$I_{\bar{z}1} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} = 5000\mathrm{mm}^4,\ I_{\bar{z}2} = \frac{10 \cdot 60^3}{12} = 180000\mathrm{mm}^4$$

$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}1} + A_2 y_2^2 = 5000 + 600 \cdot 5^2 + 180000 + 600 \cdot 40^2 = 1{,}160 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

$$I_z = I_{\bar{z}} + A y_c^2$$

$$\Rightarrow\ I = I_{\bar{z}} = I_z - A y_c^2 = 1{,}160 \cdot 10^6 - 1200 \cdot 22{,}5^2 = \underline{\underline{5{,}525 \cdot 10^5\,\mathrm{mm}^4}}$$

Uuman 2 staattinen momentti z-akselin suhteen:




$S = 600 \cdot 17{,}5 = \underline{10500\text{mm}^3}$

Leikkausvuo:

$$q = \frac{QS}{I} = \frac{6\text{kN} \cdot 10500\text{mm}^3}{5{,}525 \cdot 10^5\,\text{mm}^4} = \underline{0{,}114\text{kN/mm}}$$

Yhteen naulaan kohdistuva leikkausvoima:

$$Q_{\text{naula}} = q \cdot 20\text{mm} = 0{,}114\text{kN/mm} \cdot 20\text{mm} = \underline{\underline{2{,}28\text{kN}}}$$

**4.**

Käytetään superpositioperiaatetta ja taulukon 8.1 kohtaa 7.

Tukireaktiovoimat:

$$A = A^{\mathrm{C}} + A^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot(2L/3)^2}{2L^2}(2+\frac{L/3}{L}) + \frac{P\cdot(L/3)^2}{2L^2}(2+\frac{2L/3}{L}) = \underline{\underline{\frac{2}{3}P}}$$

$$B = B^{\mathrm{C}} + B^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot L/3}{2L}[3-(\frac{L/3}{L})^2] + \frac{P\cdot 2L/3}{2L}[3-(\frac{2L/3}{L})^2] = \underline{\underline{\frac{4}{3}P}}$$

Tarkistus: $\uparrow\ A + B - 2P = \frac{2}{3}P + \frac{4}{3}P - 2P = 0,$ OK.

Taivutusmomentti $M_{\mathrm{B}}$**:**

$$M_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot L/3\cdot 2L/3}{2L}(\frac{2L/3}{L}-2) + \frac{P\cdot 2L/3\cdot L/3}{2L}(\frac{L/3}{L}-2) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}PL}}$$

Taivutusmomentit $M_{\mathrm{C}}$ ja $M_{\mathrm{D}}$**:**

Taulukon taivutusmomentin lausekkeesta saadaan:

$$M_{\mathrm{C}} = M(\frac{L}{3}) = A\frac{L}{3} - F < \frac{L}{3} - a >= F[\frac{b^2}{6L}(2+\frac{a}{L}) - < \frac{L}{3} - a >]$$

$$M_{\mathrm{D}} = M(\frac{2L}{3}) = A\frac{2L}{3} - F < \frac{2L}{3} - a >= F[\frac{b^2}{3L}(2+\frac{a}{L}) - < \frac{2L}{3} - a >]$$

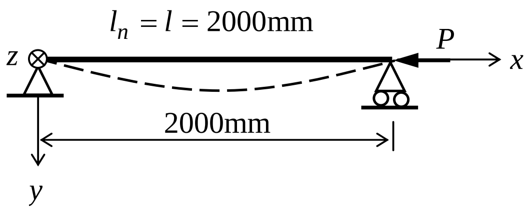
Soveltamalla näitä lausekkeita saadaan:

$$M_{\mathrm{C}} = M_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} = P[\frac{(2L/3)^2}{6L}(2+\frac{1}{3}) - 0] + P[\frac{(L/3)^2}{6L}(2+\frac{2}{3}) - 0)] = P\frac{2}{9\cdot 3}\frac{7}{3} + P\frac{1}{9\cdot 3}\frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}PL}}$$

$$M_{\mathrm{D}} = M_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}} = P[\frac{(2L/3)^2}{3L}(2+\frac{1}{3}) - (\frac{2L}{3} - \frac{L}{3})] + P[\frac{(L/3)^2}{3L}(2+\frac{2}{3}) - 0] = \underline{\underline{\frac{1}{9}P}}$$

**5.**

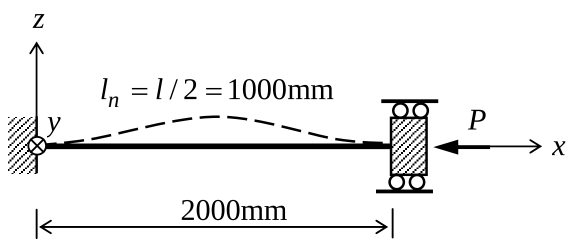
Sivulta:




$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{20\text{mm}\cdot(35\text{mm})^3}{12} = 77760\text{mm}^4$$

$$P_{\text{kr}}^{xy} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70\,\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}\cdot 77760\text{mm}^4}{(2000\text{mm})^2} = \underline{13,43\text{kN}}$$

Päältä:




$$I_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{(20\text{mm})^3\cdot 36\text{mm}}{12} = 24000\text{mm}^4$$

$$P_{\text{kr}}^{xz} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70\,\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}\cdot 24000\text{mm}^4}{(1000\text{mm})^2} = \underline{16,58\text{kN}}$$

Kriittinen kuorma:

$$P_{\text{kr}} = \underline{13,43\text{kN}}$$

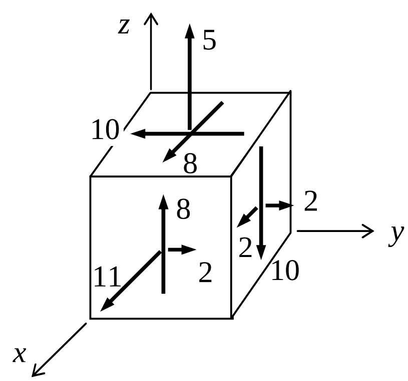
Sallittu kuorma:

$$P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{13,43\text{kN}}{2,5} = \underline{\underline{5,37\text{kN}}}$$

**Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi**
Tentti 12.5.2008

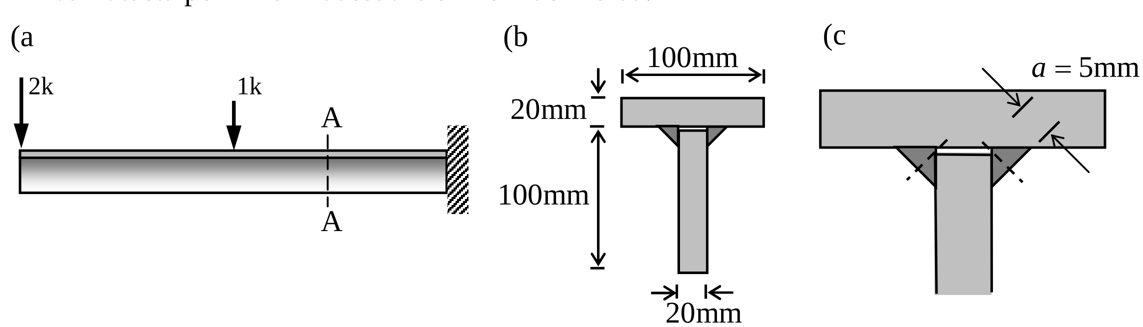
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

1. Oheisen jännitystilan pääjännitykset tunnetaan ja ne ovat suuruusjärjestyksessä $\sigma_I = 18\text{MPa}$, $\sigma_{II} = 9\text{MPa}$ ja $\sigma_{III} = -9\text{MPa}$. Määritä suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori. Yksikkö on MPa.

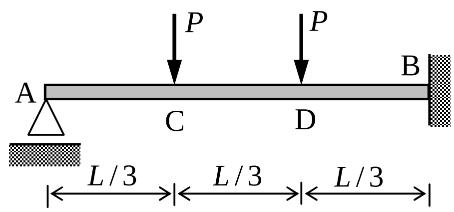



2. Jännityskomponentit pitkässä ympyräsylinterin muotoisessa kappaleessa, jonka säde on $a$ ja $x$ – akseli yhtyy sylinterin akseliin ja jota väännetään, ovat
$\tau_{xy} = -G\theta z,\ \tau_{xz} = G\theta y,\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0.$
missä $G$ ja $\theta$ ovat vakioita (leikkausmoduuli ja vääntymä). (a) Osoita, että jännityskomponentit ovat tasapainossa, kun tilavuusvoimia ei ole. (b) Osoita myös, että sylinterin reunapinta on jännityksetön (eli traktiovektori sylinterin reunapinnalla häviää).

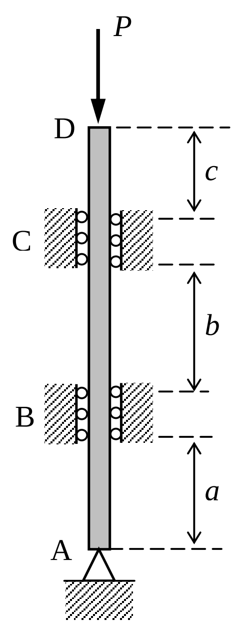
3. Määritä hitsisauman (keskimääräinen) leikkausjännitys palkin kohdassa A-A. Vinot pinnat, joilla hitsisauman keskimääräinen leikkausjännitys lasketaan, on esitetty katkoviivalla kuvan (c) leikkauksessa. Uuman ja laipan välille oletetaan rako. Hitsin vaikutusta poikkileikkaussuureisiin ei huomioida.



4. Määritä oheisen tasajäykän palkin tukireaktiot sen tuilla A ja B sekä taivutusmomentit pisteissä B, C ja D käyttäen superpositioperiaatetta.



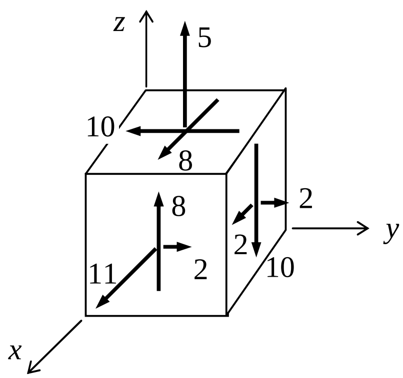

5. Alumiinisauva, jonka halkaisija on $25\text{mm}$, on tuettu kuvan mukaisesti. Tuki A estää vaaka- ja pystyliikkeen, rullatuet B ja C estävät vaakaliikkeen ja kiertymisen piirroksen tasossa. Määritä sallittu kuorma $P$, kun varmuusluku nurjahtamisen suhteen on $3,2$, $E = 77\text{GPa}$, $a = 0,9\text{m}$, $b = 1,2\text{m}$ ja $c = 0,3\text{m}$. Tarkastellaan vain kuvan tasossa tapahtuvaa nurjahdusta.



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 12.5.2008, ratkaisut

**1.**




Kuvan perusteella:

$\sigma_x = 11\text{MPa},\ \sigma_y = 2\text{MPa},\ \sigma_z = 5\text{MPa},\ \tau_{xy} = 2\text{MPa},\ \tau_{yz} = -10\text{MPa},\ \tau_{zx} = 8\text{MPa}$

$$\Rightarrow\ [\sigma] = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -10 \\ 8 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

Suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori:

$([\sigma] - \sigma_I [I])\{n\} = \{0\} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 11-\sigma_I & 2 & 8 \\ 2 & 2-\sigma_I & -10 \\ 8 & -10 & 5-\sigma_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 & 8 \\ 2 & -16 & -10 \\ 8 & -10 & -13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaistaan $n_x$ ja $n_y$ kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{aligned} -7n_x + 2n_y + 8n_z &= 0 \\ 2n_x - 16n_y - 10n_z &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z = \frac{1}{(-7)\cdot(-16) - 2^2} \begin{bmatrix} -16 & -2 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z = \frac{1}{108} \begin{Bmatrix} 108 \\ -54 \end{Bmatrix} n_z = \begin{Bmatrix} n_z \\ -\frac{1}{2} n_z \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ n_x = n_z,\ n_y = -\frac{1}{2} n_z.$$

Sijoitetaan ne ehtoon $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, jolloin saadaan

$$n_z^2 + (-\frac{1}{2} n_z)^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{4} n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \frac{2}{3} \Rightarrow n_x = \frac{2}{3},\ n_y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{1}{3},\ n_z = \frac{2}{3}.$$

Tulos on

$$\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

**2.**

(a) Kun tilavuusvoimaa ei ole, $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ eli $f_x = f_y = f_z = 0$ ja jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt ovat

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0\,.$$

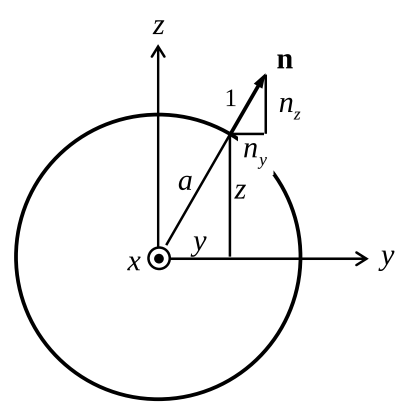
Osoitetaan, että ne toteutuvat:

$$\frac{\partial \overbrace{\sigma_x}^{0}}{\partial x}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial y}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial z}=G\theta(-\overbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}^{0}+\overbrace{\frac{\partial y}{\partial z}}^{0})=0,\ \text{OK}$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial x}+\frac{\partial \overbrace{\sigma_y}^{0}}{\partial y}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial z}=-G\theta\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \text{OK}$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial x}+\frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial y}+\frac{\partial \overbrace{\sigma_z}^{0}}{\partial z}=G\theta\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ \text{OK}$$

(b) Sylinteripinnan yksikkönormaalivektorin $\mathbf{n}$ komponentit:




Kuvion perusteella:

$$n_x=0,\ \frac{n_y}{1}=\frac{y}{a}\ \Rightarrow\ n_y=\frac{y}{a},\ \frac{n_z}{1}=\frac{z}{a}\ \Rightarrow\ n_z=\frac{z}{a}$$

Traktiovektori sylinterim pinnalla:

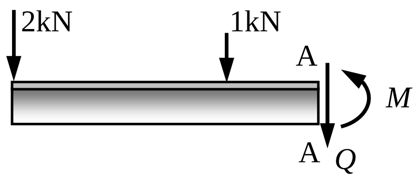
$$\{t\}^{(n)}=[\sigma]\{n\}\Leftrightarrow$$

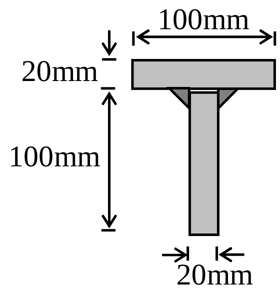
$$\begin{Bmatrix} t_x^{(n)}\\ t_y^{(n)}\\ t_z^{(n)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} n_x\\ n_y\\ n_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -G\theta z & G\theta y\\ -G\theta z & 0 & 0\\ G\theta y & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ y/a\\ z/a\end{Bmatrix}=\frac{G\theta}{a}\begin{Bmatrix}-zy+yz\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

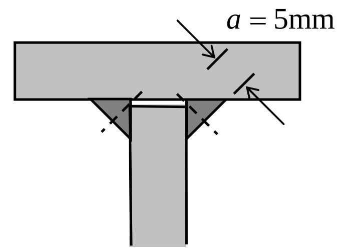
$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{t}^{(n)}=\mathbf{0}}}$$

**3.**

Leikkausvoima:

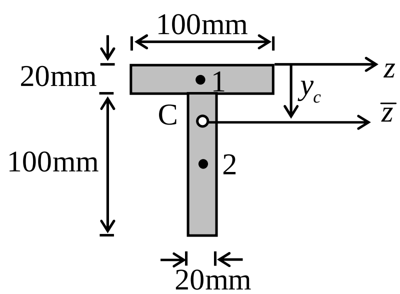



$$Q + 1\text{kN} + 2\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; Q = -3\text{kN}$$

Pintakeskiö:




$$A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\text{m}^2, \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\text{mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 4000\text{mm}^2$$

$$y_1 = 10\text{mm}, \; y_2 = 20\text{mm} + \frac{1}{2} \cdot 100\text{mm} = 70\text{mm}$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = 40\text{mm}$$

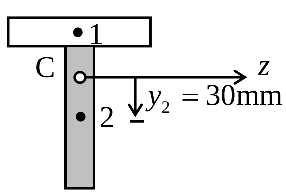
Jäyhyysmomentti $I_z$:

$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2 = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 10^2 + \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot 70^2 = 11{,}73 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$$

Jäyhyysmomentti $I = I_{\bar{z}}$:

$$I_z = I_{\bar{z}} + A y_c^2 \;\Rightarrow\; I \equiv I_{\bar{z}} = I_z - A y_c^2 = 11{,}73 \cdot 10^6 - 4000 \cdot 40^2 = \underline{5{,}33 \cdot 10^6\,\text{mm}^4}$$

Hitsisauman alapuoleisen osan staattinen momentti:




$$S_2 = A_2 \cdot y_2 = 2000 \cdot 30 = 60000\text{mm}^3$$

Leikkausvuo ja hitsin leikkausjännitys:

$$q = \frac{QS_2}{I} = \frac{-3 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot 60000\text{mm}^3}{5{,}33 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} = -33{,}77\,\text{N/mm}, \quad \bar{\tau} = \frac{-33{,}77\,\text{N/mm}}{2 \cdot 5\text{mm}} = \underline{\underline{-3{,}38\text{MPa}}}$$

**4.**

Käytetään superpositioperiaatetta ja taulukon 8.1 kohtaa 7.

Tukireaktiovoimat:

$$A = A^{\mathrm{C}} + A^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot(2L/3)^2}{2L^2}(2+\frac{L/3}{L}) + \frac{P\cdot(L/3)^2}{2L^2}(2+\frac{2L/3}{L}) = \underline{\underline{\frac{2}{3}P}}$$

$$B = B^{\mathrm{C}} + B^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot L/3}{2L}[3-(\frac{L/3}{L})^2] + \frac{P\cdot 2L/3}{2L}[3-(\frac{2L/3}{L})^2] = \underline{\underline{\frac{4}{3}P}}$$

Tarkistus: $\uparrow\ A + B - 2P = \frac{2}{3}P + \frac{4}{3}P - 2P = 0,$ OK.

Taivutusmomentti $M_{\mathrm{B}}$**:**

$$M_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}} = \frac{P\cdot L/3\cdot 2L/3}{2L}(\frac{2L/3}{L}-2) + \frac{P\cdot 2L/3\cdot L/3}{2L}(\frac{L/3}{L}-2) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}PL}}$$

Taivutusmomentit $M_{\mathrm{C}}$ ja $M_{\mathrm{D}}$**:**

Taulukon taivutusmomentin lausekkeesta saadaan:

$$M_{\mathrm{C}} = M(\frac{L}{3}) = A\frac{L}{3} - F < \frac{L}{3} - a >= F[\frac{b^2}{6L}(2+\frac{a}{L}) - < \frac{L}{3} - a >]$$

$$M_{\mathrm{D}} = M(\frac{2L}{3}) = A\frac{2L}{3} - F < \frac{2L}{3} - a >= F[\frac{b^2}{3L}(2+\frac{a}{L}) - < \frac{2L}{3} - a >]$$

Soveltamalla näitä lausekkeita saadaan:

$$M_{\mathrm{C}} = M_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} = P[\frac{(2L/3)^2}{6L}(2+\frac{1}{3}) - 0] + P[\frac{(L/3)^2}{6L}(2+\frac{2}{3}) - 0)] = P\frac{2}{9\cdot 3}\frac{7}{3} + P\frac{1}{9\cdot 3}\frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}PL}}$$

$$M_{\mathrm{D}} = M_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}} = P[\frac{(2L/3)^2}{3L}(2+\frac{1}{3}) - (\frac{2L}{3} - \frac{L}{3})] + P[\frac{(L/3)^2}{3L}(2+\frac{2}{3}) - 0] = \underline{\underline{\frac{1}{9}P}}$$

**5.**

Jäyhyysmomentti: $I = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{4}\pi(25\text{mm}/2)^4 = \underline{19175\text{mm}^4}$

<u>Väli AB:</u>

Nurjahduspituus: $l_n = 0,7a = 0,7 \cdot 900\text{mm=630mm}$

Kriittinen kuorma: $P_{\text{kr}}^{\text{AB}} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 77\text{kN/mm}^2 \cdot 19175\text{mm}^4}{(630\text{mm})^2} = \underline{36,72\text{kN}}$

<u>Väli BC:</u>

Nurjahduspituus: $l_n = b/2 = 1200\text{mm}/2 = 600\text{mm}$

Kriittinen kuorma: $P_{\text{kr}}^{\text{BC}} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 77\text{kN/mm}^2 \cdot 19175\text{mm}^4}{(600\text{mm})^2} = \underline{40,48\text{kN}}$

<u>Väli CD:</u>

Nurjahduspituus: $l_n = 2c = 2 \cdot 300\text{mm} = 600\text{mm}$

Kriittinen kuorma: $P_{\text{kr}}^{\text{CD}} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 77\text{kN/mm}^2 \cdot 19175\text{mm}^4}{(600\text{mm})^2} = \underline{40,48\text{kN}}$

Koko sauvan kriittinen kuorma on näistä pienin:

$P_{\text{kr}} = P_{\text{kr}}^{\text{AB}} = 36,72\text{kN}$

Sallittu kuorma:

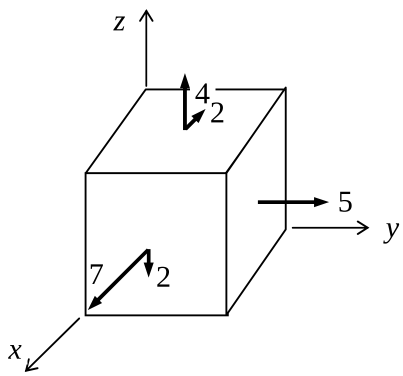
$$\frac{P_{\text{kr}}}{P_{\text{sall}}} = n \Rightarrow P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{36,72\text{kN}}{3,2} = \underline{\underline{11,5\text{kN}}}$$

# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

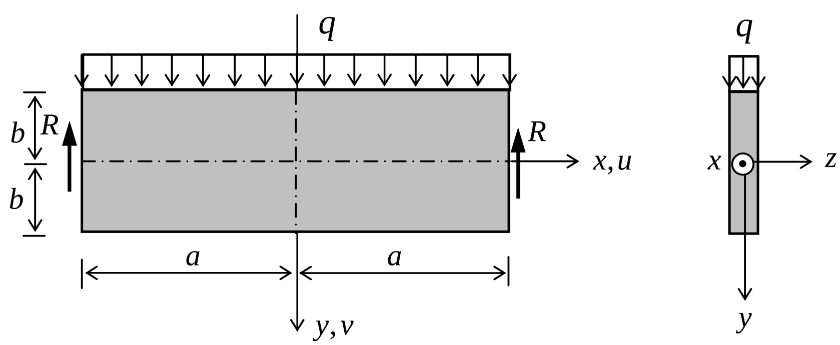
Tentti 28.10.2008

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi:
opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
koulutusohjelma ja oppilasnumero, myös tarkistuskirjain

1. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila $x, y, z$ -koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla. Yksiköt ovat MPa.




Määritä jännityskomponentit ja jännitysmatriisi sekä jännitysvektori (traktio), normaalijännitys, normaalijännitysvektori, leikkausjännitysvektori sekä leikkausjännityksen suuruus pisteen P kautta kulkevalla tasolla, jonka yksikkönormaalivektori on $\mathbf{n} = 2/3\mathbf{i} + 2/3\mathbf{j} + 1/3\mathbf{k}$ .




2. Oheinen suorakaiteen muotoinen, päistään tuettu levy on tasojännitystilassa. Sen yläreunalla vaikuttaa pintayksikköä kohti tasan jakautunut kuorma $q$. Levyn siirtymäkomponenteille on johdettu lausekkeet

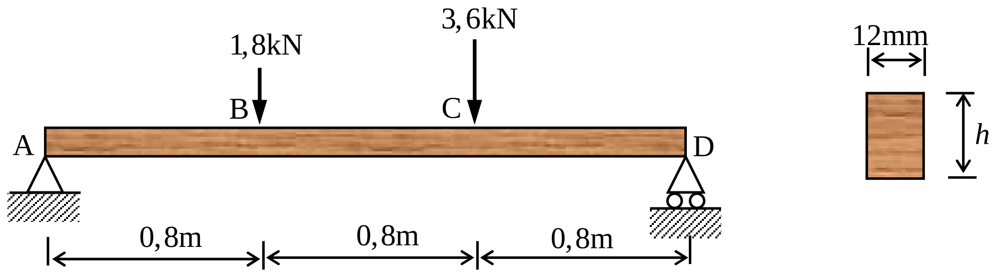
$$u(x,y) = \frac{q}{16b^3E}[4xy(3a^2 - x^2) + 8xy(y^2 - \frac{3}{5}b^2) + 4\nu x(y^3 - 3b^2y + 2b^3)],$$

$$v(x,y) = \frac{q}{16b^3E}\{(a^2 - x^2)(5a^2 - x^2) + \frac{6}{5}(a^2 - x^2)[8b^2 + 5\nu(b^2 - y^2)]$$
$$- \frac{1}{5}[(5 + 10\nu)y^4 - (30 + 12\nu)b^2y^2 + 40b^3y]\},$$

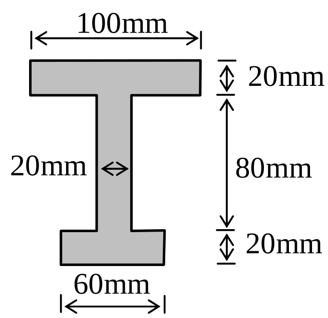
missä $E$ on kimmomoduuli ja $\nu$ on Poissonin vakio. Osoita, että levyn jännityskomponenteilla $\sigma_x$ ja $\tau_{xy}$ on lausekkeet

$$\sigma_x = \frac{q}{4b^3}[3(a^2 - x^2)y + 2y^3 - \frac{6}{5}b^2 y], \quad \tau_{xy} = -\frac{3}{4}\frac{q}{b^3}x(b^2 - y^2)$$

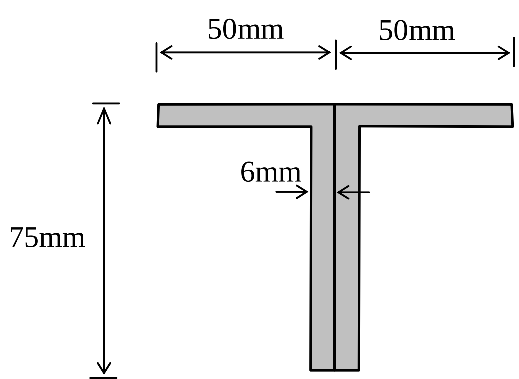
3. Mitoita oheisen puusta tehdyn palkin poikkileikkaus, jonka sallittu normaalijännitys on $12\text{MPa}$. Tarkista lopuksi, että sallittu leikkausjännitys $1\text{MPa}$ ei ylity tuen D vieressä olevassa poikkileikkauksessa.




4. Määritä täysplastinen momentti $M_p$ sauvalle, jonka poikkileikkaus on kuvan mukainen, kun poikkileikkausta taivutetaan vaaka-akselin ympäri. Materiaalin otaksutaan olevan kimmoista ideaaliplastista myötärajan ollessa $240\text{MPa}$.




5. Puristussauva on yläpäästään kiinnitetty siten, että se ei pääse siirtymään vaakatasossa, mutta on vapaa kiertymään. Alapäästään se on jäykästi kiinnitetty. Sauvan tehokas pituus on 3m ja se on tehty hitsaamalla yhteen kaksi $75 \times 50 \times 6$ L-profiilia kuvan mukaisesti. Määritä sauvalle sallittu keskeinen puristava kuorma, kun varmuusluku nurjahduksen suhteen on 3 ja sauvan kimmomoduuli on $E = 200\text{GPa}$.



# Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Tentti 28.11.2008, ratkaisut

**1.**

Jännityskomponentit:

$\sigma_x = 7,\ \sigma_y = 5,\ \sigma_z = 4,$

$\tau_{xy} = 0,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = -2$

Jännitysmatriisi:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jännitysvektori:

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \underline{\underline{(4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j})}}$$

Normaalijännitys:

$$\sigma_n = \mathbf{n} \bullet \mathbf{t}^{(n)} = (\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}) \bullet (4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j}) = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} = \underline{\underline{\frac{44}{9}}}$$

Normaalijännitysvektori:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} = \frac{44}{9}(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}}$$

Leikkausjännitysvektori:

$$\boldsymbol{\tau}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = 4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j} - \frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{2}{27}(10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k})}}$$

Leikkausjännityksen suuruus:

$$\tau^{(n)} = \sqrt{|\,\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\,|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{4^2 + (-\frac{10}{3})^2 - (\frac{44}{9})^2} = \sqrt{\frac{260}{81}} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

tai

$$\tau^{(n)} = |\,\boldsymbol{\tau}^{(n)}\,| = \frac{2}{27}|\,10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k}\,| = \frac{2}{27}\sqrt{10^2 + 1^2 + 22^2} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

**2.**

Venymäkomponentit:

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{16b^3E}[12y(a^2-x^2)+(8+4\nu)y^3-(\frac{24}{5}+12\nu)b^2y+8\nu b^3)],$$

$$\varepsilon_y \equiv \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{q}{16b^3E}[-12\nu y(a^2-x^2)-(4+8\nu)y^3+(\frac{24}{5}\nu+12)b^2y-8b^3],$$

$$\gamma_{xy} \equiv \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{3}{2}\frac{q(1+\nu)x}{Eb^3}(b^2-y^2)$$

Jännityskomponentit:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\frac{q}{16b^3E}[12y(a^2-x^2)+(8+4\nu)y^3-(\frac{24}{5}+12\nu)b^2y+8\nu b^3)$$

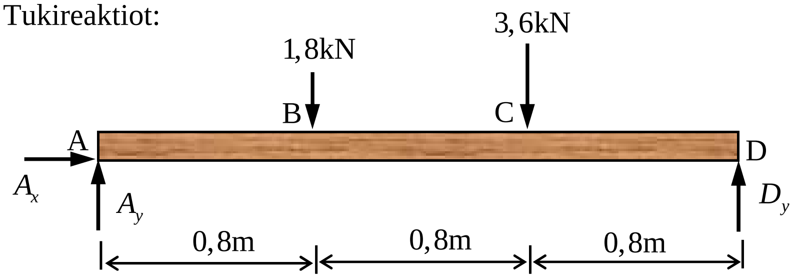
$$-12\nu^2y(a^2-x^2)-(4+8\nu)\nu y^3+(\frac{24}{5}\nu+12)\nu b^2y-8\nu b^3]$$

$$= \underline{\underline{\frac{q}{4b^3}[3y(a^2-x^2)+2y^3-\frac{6}{5}b^2y]}}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\frac{qx}{b^3}(b^2-y^2)}}$$

**3.**

Tukireaktiot:

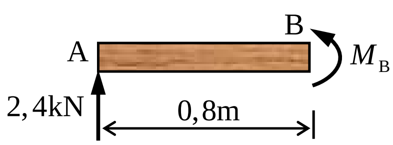


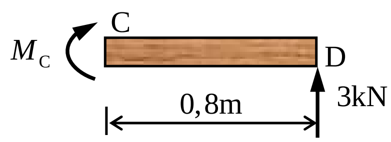

$\rightarrow \quad A_x = \underline{0}$

D $\quad -A_y \cdot 2,4\text{m} + 1,8\text{kN} \cdot 1,6\text{m} + 3,6\text{kN} \cdot 0,8\text{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \underline{2,4\text{kN}}$

A $\quad D_y \cdot 2,4\text{m} - 3,6\text{kN} \cdot 1,6\text{m} - 1,8\text{kN} \cdot 0,8\text{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = \underline{3\text{kN}}$

Taivutusmomentit pisteissä B ja C:




B $\quad -2,4\text{kN} \cdot 0,8\text{m} + M_\mathrm{B} = 0$

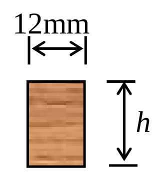
$\Rightarrow \quad M_\mathrm{B} = \underline{1,92\text{kNm}}$

C $\quad 3\text{kN} \cdot 0,8\text{m} - M_\mathrm{C} = 0$

$\Rightarrow \quad M_\mathrm{C} = \underline{2,4\text{kNm}}$

$\Rightarrow \quad M_\mathrm{max} = M_\mathrm{C} = \underline{2,4\text{kNm}}$

Jäyhyysmomentti ja taivutusvastus:




$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12\text{mm} \cdot h^3}{12} = 1\text{mm} \cdot h^3, \; W = \frac{I}{h/2} = 2\text{mm} \cdot h^2$$

Suurin normaalijännitys:

$$\sigma_\mathrm{max} = \frac{M_\mathrm{max}}{W} = \frac{2,4\text{kNm}}{2\text{mm} \cdot h^2} = \frac{1,2 \cdot 10^6}{h^2}\text{N}$$

Ehto:

$$\sigma_\mathrm{max} = \sigma_\mathrm{sall} \quad \Rightarrow \quad \frac{1,2 \cdot 10^6 \text{N}}{h^2} = 12\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 10^6}{12}\text{mm}^2} = \underline{\underline{316,2\text{mm}}}$$

Leikkausvoima tuella D:

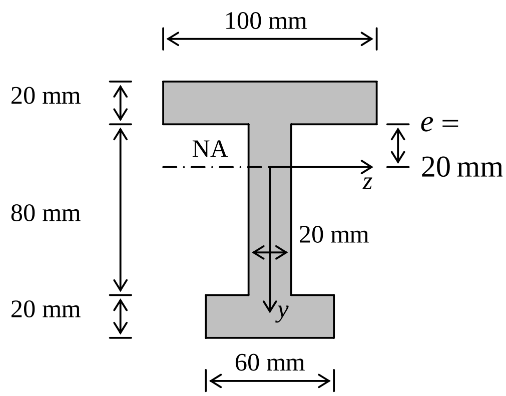
$$Q_\mathrm{B} = -D_y = -3\text{kN}$$

Leikkausjännityksen tarkistus tuella D:

$$S_{\max} = S(0) = b\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}, \tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{Ib} = \frac{Q\cdot bh^2/8}{bh^3/12\cdot b} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{-3\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{12\mathrm{mm}\cdot 316,2\mathrm{mm}} = -0,791\mathrm{MPa}$$

$|\tau_{\max}| < \tau_{\mathrm{sall}} = 1\mathrm{MPa}$, OK.

**4.**




Neutraaliakselin (NA) paikka sijoittuu siten, että $A_{\mathrm{ala}} = A_{\mathrm{ylä}}$. Koko poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A = (100\cdot 20 + 80\cdot 20 + 60\cdot 20)\mathrm{mm}^2 = 4800\ \mathrm{mm}^2$$

$\Rightarrow \quad A_{\mathrm{ala}} = A_{\mathrm{ylä}} = 2400\ \mathrm{mm}^2$ joten $e = 20$ mm.

Täysplastinen momentti:

$$M_p = \sigma_p W_p,$$

missä plastinen taivutusvastus on

$$W_p = S_{\mathrm{ala}} + |S_{\mathrm{ylä}}|,$$

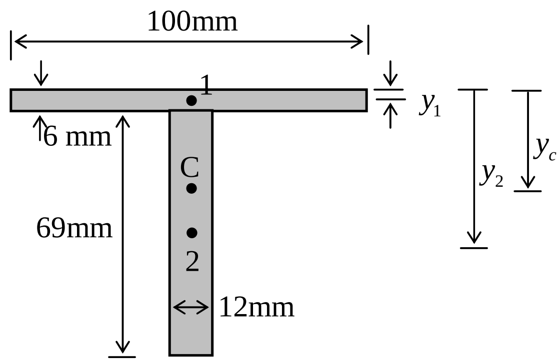
missä staattiset momentit ovat:

$$S_{\mathrm{ala}} = (60\cdot 20\cdot 70 + 20\cdot 60\cdot 30)\mathrm{mm}^3 = 120000\ \mathrm{mm}^3,$$
$$|S_{\mathrm{ylä}}| = (100\cdot 20\cdot 30 + 20\cdot 20\cdot 10)\mathrm{mm}^3 = 64000\ \mathrm{mm}^3,$$

joten $W_p = (120000 + 64000)\mathrm{mm}^3 = 184000\ \mathrm{mm}^3$ ja täysplastiselle momentille saadaan

$$M_p = 240\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot 184000\ \mathrm{mm}^3 = 44.16\ \mathrm{kNm}.$$

**5.**




$$A_1 = 100 \cdot 6 = 600\text{mm}^2$$

$$A_2 = 69 \cdot 12 = 828\text{mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 1428\text{mm}^2$$

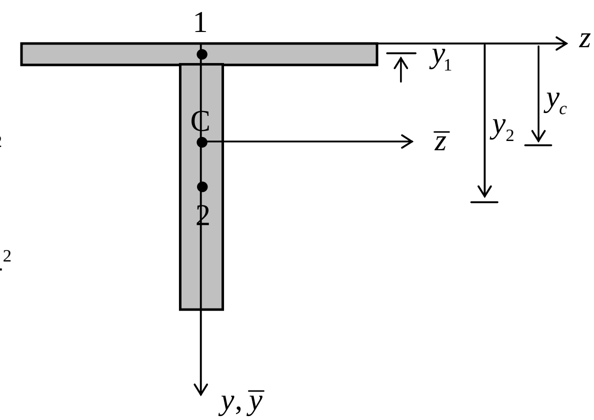
$$y_1 = 3\text{mm}$$

$$y_2 = \frac{69}{2} + 6 = 40,5\text{mm}$$

Pintakeskiö:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{600 \cdot 3 + 828 \cdot 40,5}{1428} = 24,74\text{mm}$$

Jäyhyysmomentit:




$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2$$

$$= \frac{100 \cdot 6^3}{12} + 600 \cdot 3^2 + \frac{12 \cdot 69^3}{12} + 828 \cdot 40,5^2$$

$$= 1,693836 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{\bar{z}} = I_z - A y_c^2 = 1,693836 \cdot 10^6 - 1428 \cdot 24,74^2$$

$$= \underline{8,1980 \cdot 10^5 \text{mm}^4}$$

$$I_{\bar{y}} = I_y = I_{y1} + I_{y2} = \frac{6 \cdot 100^3}{12} + \frac{69 \cdot 12^3}{12}$$

$$= \underline{5,099 \cdot 10^5 \text{mm}^4}$$

Pienin (pää-)jäyhyysmomentti:

$$I_{\min} = I_{\bar{y}} = 5,099 \cdot 10^5 \text{mm}^4$$

Nurjahduspituus:

$$l_n = 0,70 \cdot 3 = 2,1\text{m} = 2,1 \cdot 10^3 \text{mm}$$

Kriittinen kuorma:

$$P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_n^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \text{N/mm}^2 \cdot 5,099 \cdot 10^5 \text{mm}^4}{(2,1 \cdot 10^3 \text{mm})^2} = 228231,8\text{N} = 228,2\text{kN}$$

Sallittu kuorma

$$P_{\text{sall}} = \frac{P_{\text{kr}}}{n} = \frac{228,2\text{kN}}{3} = \underline{\underline{76,1\text{kN}}}$$