

Mat-1.1132 Peruskurssi C3-II

Tentti 16.12.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia. Koeaika on 4h. Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoisen. Kaikki vastaukset on perusteltava huolellisesti. Muista vastata palautekyselyyn, linkki Nopassa.

1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Laske A :n ominaisarvot ja vektorit.
 - (b) Miksi A ei ole diagonalisoituva?
 - (c) Laske matriisiekspONENTTI e^A .
2. (a) Mitä tarkoitetaan pienimmän neliösumman ratkaisulla yhtälöryhmälle $Ax = b$?
- (b) Etsi pienimmän neliösumman ratkaisu yhtälöryhmälle $Ax = b$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. (a) Laske \mathbb{R}^3 :n vektorinormiin

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$$

liittyvä matriisinormi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 7 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Etsi myös vektori $b \in \mathbb{R}^3$ siten, että $\|b\|_\infty = 1$ ja

$$\|Ab\|_\infty = \|A\|_\infty.$$

4. (a) Olkoon A reaallinen $m \times n$ -matriisi. Mitä ovat A :n singulaariarvot ja kuinka monta niitä on?

(b) Muodosta matriisin B singulaariarvohajotelma, kun

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla seuraava alkuarvo-ongelma:

$$y'' + 4y = \sin t, \quad \text{kun } t > 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Laplace-muunnoksia:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)L(g)$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = s/(s^2 + \omega^2)$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \omega/(s^2 + \omega^2)$$

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = e^{-as}/s$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$$