Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Lassas / Lukkari

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

Tentti 30.10.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimen käyttö on kielletty.

1. Millä λ:n arvoilla tehtävällä

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x)\,, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0\,,\ u(1) = 0\,, \end{cases}$$

on Greenin funktio? Laske tehtävän Greenin funktio niillä arvoilla λ, joilla Greenin funktio on olemassa.

2. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$u_x + u_y = -u$$

alueessa $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alkuehdolla $u(s, as) = 1$, $s \in \mathbb{R}$. Selvitä millä a:n arvoilla ratkaisu on olemassa.

3. Ratkaise muodollisesti, eli esitä sarjamuotoinen ratkaisu tehtävälle

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, normaali alue ja u tehtävän

$$\begin{cases} u_{tt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{A}\nabla u), & \mathbf{x} \in \Omega,\ t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

ratkaisu, missä $\boldsymbol{A}$ on symmetrinen ja positiividefiniitti $n \times n$-matriisi.

   (a) Näytä, että ratkaisun energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 + (\boldsymbol{A}\nabla u)\cdot\nabla u\,dx$$

   säilyy. Vihje: $(\boldsymbol{A}\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\cdot(\boldsymbol{A}\mathbf{v}_2)$, koska $\boldsymbol{A}$ on symmetrinen.

   (b) Näytä, että yo. tehtävän ratkaisu on yksikäsitteinen. Vihje: tarkastele kahden ratkaisun erotusta ja käytä tietoa, että $\boldsymbol{A}$ on positiividefiniitti.

5. Johda Taylorin lauseen avulla kaava

$$u''(x) = \frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)) + O(h^2)$$

riittävän sileille funktioille u. Miten tämän kaavan avulla ratkaistaisiin numeerisesti tehtävä

$$\begin{cases} -u''(x) + 4u(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = 2, u(1) = 1? \end{cases}$$

6. (a) Etsi tehtävän

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda^2 u, & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

   variaatiomuoto.

   (b) Olkoon $V_h = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, missä V on (a)-kohdan perusteella sopivasti valittu avaruus. Millaisesta yhtälöryhmästä (a)-kohdan tehtävän Ritz-Galerkin –approksimaatio $u_h \in V_h$ saadaan laskettua?

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu \, d\sigma \,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\, \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma \,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\, \Delta u - u\, \Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\, \frac{\partial v}{\partial \nu} v\nu)\, d\sigma \,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu},\, d\sigma \,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx\,, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Besselin yhtälö:

$$\rho^2 J''_m(\rho) + \rho J'_m(\rho) + (\rho^2 - m^2) J_m(\rho) = 0.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_\phi\,.$$

d'Alembertin kaava:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mathbf{v}|\le 1} \frac{(\frac{\partial}{\partial t} t\,(t\, f(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v}))) + t\, g(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v})}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}}\, d\mathbf{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{v}|=1} \big[\, \frac{\partial}{\partial t} t\,\big(\, t\, f(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v})\,\big) + t\, g(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v})\,\big]\, d\sigma_{\mathbf{v}}\,.$$